

**Genauigkeit versus Rechenaufwand**  
**- Ein Vergleich Monte-Carlo-basierter Value-at-Risk-Methoden**

D I S S E R T A T I O N  
der Universität St. Gallen,  
Hochschule für Wirtschafts-,  
Rechts- und Sozialwissenschaften (HSG)  
zur Erlangung der Würde eines  
Doktors der Wirtschaftswissenschaften

vorgelegt von

**Roman Tuor**

von

Sumvitg (Graubünden)

Genehmigt auf Antrag der Herren

**Prof. Dr. Heinz Zimmermann**

und

**Prof. Dr. Heinz Müller**

Dissertation Nr. 2834

Die Universität St. Gallen, Hochschule für Wirtschafts-, Rechts- und Sozialwissenschaften (HSG), gestattet hiermit die Drucklegung der vorliegenden Dissertation, ohne damit zu den darin ausgesprochenen Anschauungen Stellung zu nehmen.

St. Gallen, den 26. Juni 2003

Der Rektor:

Prof. Dr. Peter Gomez

## **Vorwort**

In meiner Tätigkeit als Consultant im Bereich Asset&Liability- und Risk Management bei der Almafín AG in St. Gallen wurde mir bewusst, wie wichtig der Zeitfaktor im praktischen Umfeld des Risk Managements ist. Risikoberechnungen, die nicht innert angemessener Zeit realisiert und in den meist unter Zeitdruck stattfindenden Entscheidungsprozessen integriert werden können, stiften in der Praxis kaum Nutzen. Das gilt im Speziellen auch bei Value-at-Risk-Messungen. Deshalb habe ich mir zum Ziel gesetzt, den Rechenaufwand und die Genauigkeit von ausgewählten Monte-Carlo-Methoden zu untersuchen und zu dokumentieren.

Grossen Dank möchte ich Herrn Dr. Zeno Staub, Dr. Simon Kauth und Dr. Thomas König aussprechen, die mir innerhalb der Almafín ermöglicht haben, mich mit dieser Thematik intensiv auseinanderzusetzen. Ebenfalls möchte ich mich für die inspirierenden Gespräche bei Herrn Dr. Thomas Heinzl, Dr. Markus Leippold und Joachim Göbel bedanken.

Ganz besonders bedanken möchte ich mich bei meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Heinz Zimmermann, der in mir das Interesse für die Finanzmärkte geweckt, mein diesbezügliches Wissen vertieft und gefördert hat. In diesem Zusammenhang blicke ich immer wieder gerne auf die von ihm durchgeführten Doktorandenseminare zurück, die meiner Arbeit immer wieder viel auftrieb verliehen und sie in geeigneter Weise befruchtet haben.

Herrn Prof. Dr. Heinz Müller danke ich bestens für die Übernahme des Korreferats. Seine Kommentare und Anregungen zur Arbeit waren überaus hilfreich. Er hat für mich die Brücke zwischen Mathematik und Finance geschlagen.

Ein riesiges Dankeschön an meine Freunde Paolo Cominotti, Michael Cajochen und Reto Gustin für die kritische Durchsicht meines Manuskriptes, sowie an meine Eltern, all meine Freunde und Bekannte, für die Unterstützung und die Motivation, die ich während der Arbeit durch sie erfahren durfte.

Mein herzlichster Dank richtet sich an meine Freundin Sandra Schlegel, dem allerliebsten Menschen in meinem Leben und der Sonne meines Weges. Ihr widme ich diese Arbeit.

Basel und Bern, im Oktober 2002

Roman Tuor



## Inhaltsübersicht

INHALTSÜBERSICHT.....	I
INHALTSVERZEICHNIS.....	IV
ABBILDUNGSVERZEICHNIS.....	IX
TABELLENVERZEICHNIS .....	XI
ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS.....	XIII
VERZEICHNIS MATHEMATISCHER UND STATISTISCHER SYMBOLE.....	XV
WICHTIGE SYMBOLE DIESER ARBEIT .....	XVII
ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS DER GETESTETEN MONTE-CARLO-METHODEN .....	XXI
1    EINLEITUNG .....	1
1.1  VaR-Methoden: Genauigkeit versus Rechenaufwand .....	2
1.2  Schwerpunkt und Abgrenzung der Arbeit.....	8
1.3  Zielsetzung der Arbeit.....	10
1.4  Aufbau der Arbeit .....	11
ERSTER TEIL .....	13
2    GRUNDLAGEN DER MARKTRISIKOMESSUNG.....	13
2.1  Identifikation der Marktfaktoren .....	15
2.2  Modellierung der Marktfaktoren.....	16
2.3  G/V-Funktion des Portfolios.....	20
2.4  Marktrisikomasse.....	25
2.5  Zusammenfassung.....	33
3    MC-METHODEN MIT G/V-APPROXIMATIONEN .....	34
3.1  Full-MC-Methode.....	35
3.2  Delta-Methode .....	42
3.3  Delta-Gamma-Methode .....	45
3.4  PCA-Grid-Methode.....	49
3.5  PLS-Grid-Methode.....	77
3.6  Grid-MC-Methoden für umfangreiche Portfolios .....	90
3.7  Zusammenfassung.....	99
ZWEITER TEIL .....	101
4    MESSUNG DER GENAUIGKEIT MC-METHODEN .....	102

4.1	Portfoliogruppen .....	103
4.2	Testablauf.....	106
4.3	Zinskurvensets .....	108
4.4	Konfidenzintervall für den wahren VaR.....	111
4.5	VaR-Referenzwerte .....	113
4.6	Prozentuale Abweichung .....	115
4.7	Fehlerkennzahlen .....	116
4.8	Zusammenfassung .....	118
5	RESULTATE DER GENAUIGKEITSANALYSE .....	119
5.1	Long-Bond-Portfolio .....	120
5.2	Long/Short-Bond-Portfolio.....	128
5.3	Hedged-Long/Short-Bond-Portfolio .....	134
5.4	Short-Caplet/Floorlet-Portfolio.....	140
5.5	Digital-Option-Portfolio.....	145
5.6	Genauigkeit alternativer PLS-Grid-Modelle .....	152
5.7	Zusammenfassung .....	157
6	MESSUNG DES RECHENAUFWANDS.....	158
6.1	Rechenaufwände im Überblick .....	159
6.2	Methodenspezifischer Rechenaufwand .....	163
6.3	Instrumentenrechenaufwände im Vergleich.....	168
6.4	Zusammenfassung .....	172
7	ZUSAMMENFASSUNG.....	173
7.1	Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Long-Bond-Portfolio .....	173
7.2	Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Long/Short-Bond-Portfolio .....	175
7.3	Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Hedged-L/S-Bond-Portfolio.....	176
7.4	Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Short-Caplet/Floorlet-Portfolio.....	177
7.5	Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Digital-Option-Portfolio.....	178
7.6	Schlussfolgerung.....	180
	ANHANG .....	181
8	TECHNISCHER ANHANG .....	181
8.1	Caplets und Floorlets .....	181
8.2	Zahlenmaterial für das Anwendungsbeispiel: Short-Caplet-Portfolio .....	182
8.3	Eigenwertproblem .....	184

---

8.4	Ermittlung der unterjährigen annualisierten stetigen Spotrates .....	187
8.5	Ermittlung der überjährigen annualisierten stetigen Spotrates.....	187
8.6	Bestimmung der Forwardrate.....	188
8.7	Zahlenmaterial für das Anwendungsbeispiel: Steepness-Bondportfolio.....	188
8.8	Neuberechnungen zur numerischen Schätzung der Sensitivitäten.....	190
9	ANHANG MIT TESTRESULTATEN.....	196
9.1	Testresultate des Long-Bond-Portfolios .....	196
9.2	Testresultate des Long/Short-Bond-Portfolios.....	198
9.3	Testresultate des Hedged-Long/Short-Bond-Portfolios .....	201
9.4	Testresultate des Short-Caplet/Floorlet-Portfolios.....	204
9.5	Testresultate des Digital-Option-Portfolios.....	207
	LITERATURVERZEICHNIS .....	211
	STICHWORTVERZEICHNIS .....	219

# Inhaltsverzeichnis

<b>INHALTSÜBERSICHT.....</b>	<b>I</b>
<b>INHALTSVERZEICHNIS .....</b>	<b>IV</b>
<b>ABBILDUNGSVERZEICHNIS.....</b>	<b>IX</b>
<b>TABELLENVERZEICHNIS .....</b>	<b>XI</b>
<b>ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS.....</b>	<b>XIII</b>
<b>VERZEICHNIS MATHEMATISCHER UND STATISTISCHER SYMBOLE.....</b>	<b>XV</b>
<b>WICHTIGE SYMBOLE DIESER ARBEIT .....</b>	<b>XVII</b>
<b>ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS DER GETESTETEN MONTE-CARLO-METHODEN .....</b>	<b>XXI</b>
<b>1 EINLEITUNG .....</b>	<b>1</b>
<b>1.1 VaR-Methoden: Genauigkeit versus Rechenaufwand .....</b>	<b>2</b>
1.1.1 Entwicklung der VaR-Methoden .....	3
<i>Parametrische Delta-Gamma-Methoden</i> .....	4
<i>MC-Methoden mit Varianz-Reduktionstechniken</i> .....	5
<i>MC-Methoden mit G/V-Approximationen</i> .....	6
<b>1.2 Schwerpunkt und Abgrenzung der Arbeit.....</b>	<b>8</b>
<i>VaR-Dimension: "Marktfaktormodell"</i> .....	8
<i>VaR-Dimension: "Berechnungsmethode"</i> .....	9
<i>VaR-Dimension "G/V-Funktion"</i> .....	9
<b>1.3 Zielsetzung der Arbeit.....</b>	<b>10</b>
<b>1.4 Aufbau der Arbeit .....</b>	<b>11</b>
<b>ERSTER TEIL .....</b>	<b>13</b>
<b>2 GRUNDLAGEN DER MARKTRISIKOMESSUNG .....</b>	<b>13</b>
<b>2.1 Identifikation der Marktfaktoren .....</b>	<b>15</b>
<b>2.2 Modellierung der Marktfaktoren.....</b>	<b>16</b>
2.2.1 Zufälliger Marktvektor .....	16
2.2.2 Zufälliger Risikovektor .....	17
2.2.3 Erwartungswert des Risikovektors .....	17
2.2.4 Kovarianzmatrix des Risikovektors .....	18
2.2.5 Verteilung des Risikovektors .....	18
<b>2.3 G/V-Funktion des Portfolios.....</b>	<b>20</b>
<i>Delta-Vektor</i> .....	21
<i>Gamma-Matrix</i> .....	21
<i>Taylor-Reihe</i> .....	22
2.3.1 Portfoliotypen .....	22
<i>Lineares Portfolio</i> .....	22
<i>Konvexes Portfolio</i> .....	23
<i>Komplexes Portfolio</i> .....	24

<b>2.4</b>	<b>Marktrisikomasse</b> .....	<b>25</b>
2.4.1	Value-at-Risk .....	25
	<i>Definition des VaR</i> .....	26
	<i>Haltedauer</i> .....	28
	<i>Konfidenzniveau</i> .....	29
	<i>Anwendungsbereiche des VaR</i> .....	30
	<i>Kritische Würdigung des VaR</i> .....	30
2.4.2	Shortfall-Masse.....	30
<b>2.5</b>	<b>Zusammenfassung</b> .....	<b>33</b>
<b>3</b>	<b>MC-METHODEN MIT G/V-APPROXIMATIONEN</b> .....	<b>34</b>
<b>3.1</b>	<b>Full-MC-Methode</b> .....	<b>35</b>
3.1.1	Prozessablauf der MC-Simulation .....	35
	<i>MC-Schritt 1: Erzeugung der MC-Szenarien</i> .....	35
	<i>MC-Schritt 2: Berechnung der G/V-Werte der Szenarien</i> .....	37
	<i>MC-Schritt 3: Anordnung der Resultate und Bestimmung des VaR</i> .....	38
3.1.2	Anwendungsbeispiel: Short-Caplet-Portfolio .....	39
<b>3.2</b>	<b>Delta-Methode</b> .....	<b>42</b>
3.2.1	Fortsetzung des Anwendungsbeispiels: Short-Caplet-Portfolio .....	42
<b>3.3</b>	<b>Delta-Gamma-Methode</b> .....	<b>45</b>
3.3.1	Fortsetzung Anwendungsbeispiel: Short-Caplet-Portfolio.....	45
<b>3.4</b>	<b>PCA-Grid-Methode</b> .....	<b>49</b>
3.4.1	Grid-Approximation.....	50
3.4.2	Grid-Approximation für den zweidimensionalen Fall.....	50
3.4.3	Bestimmung der Grid-Punkte .....	51
3.4.4	Zusammenstellung der Grid-Tabelle.....	51
3.4.5	Lineare Grid-Interpolation .....	52
3.4.6	Grid-Approximationsfehler.....	54
3.4.7	PCA-Methode .....	59
	<i>Standardisierung der Risikokomponenten</i> .....	60
	<i>Abbildung des standardisierten Risikovektors mittels PCA-Faktoren</i> .....	61
	<i>Reduktion der Faktordimensionalität</i> .....	62
	<i>Abbildung des ursprünglichen Risikovektors mittels PCA-Faktoren</i> .....	63
	<i>PCA-Ladungsmatrix</i> .....	64
	<i>PCA-Vektor</i> .....	64
	<i>Optimale Anzahl der PCA-Faktoren</i> .....	65
3.4.8	Kombination der Grid-Approximation und der PCA-Methode.....	66
3.4.9	Anwendungsbeispiel: Steepness-Bondportfolio.....	67
	<i>Modellierung der Zinskurvendynamik mit Hilfe von PCA-Faktoren</i> .....	68
	<i>Zinskurvenbewegungen</i> .....	71
	<i>Zinskurvenbewegung des ersten PCA-Faktors</i> .....	71
	<i>Zinskurvenbewegung des zweiten PCA-Faktors</i> .....	72
	<i>Zinskurvenbewegung des dritten PCA-Faktors</i> .....	73
	<i>Relevanz der PCA-Faktoren für die Risikoeinschätzung des Steepness-Bondportfolios</i> .....	74
<b>3.5</b>	<b>PLS-Grid-Methode</b> .....	<b>77</b>
3.5.1	Pre-Calculation-Datenset .....	77
3.5.2	Extraktion der PLS-Faktoren .....	79
	i) <i>Regressionsanalysen durchführen</i> .....	79
	ii) <i>PLS-Faktor aus den Regressionskoeffizienten zusammensetzen</i> .....	80

iii) Residuen ermitteln.....	80
Orthogonalität der PLS-Faktoren.....	82
Zusammenhang zwischen Risikokomponenten und PLS-Faktoren.....	82
PLS-Vektor.....	83
PLS-Ladungsmatrix.....	84
3.5.3 Konstruktion des PLS-Grids.....	84
3.5.4 Fortsetzung des Anwendungsbeispiels: Steepness-Bondportfolio.....	84
Zinskurvenbewegung des ersten PLS-Faktors.....	86
Zinskurvenbewegung des zweiten PLS-Faktors.....	86
Zinskurvenbewegung des dritten PLS-Faktors.....	87
Risikorelevanz der PLS-Faktoren für das Steepness-Bondportfolio.....	88
<b>3.6 Grid-MC-Methoden für umfangreiche Portfolios.....</b>	<b>90</b>
Schritt 1: Bildung der Marktfaktorblöcke und Instrumentenzuordnung.....	92
Schritt 2: Grid-G/V-Funktion auf Ebene der Marktfaktorblöcke.....	92
Schritt 3: MC-Simulation.....	93
Schritt 4: Ermittlung der G/V-Vektoren der Marktfaktorblöcke.....	94
Schritt 5: Währungsumwandlung und Konsolidierung der G/V-Werte.....	95
Schritt 6: Ermittlung der G/V-Verteilung und des VaR.....	96
Kritische Anmerkungen.....	97
Vorteile der Grid-MC-Methode.....	98
<b>3.7 Zusammenfassung.....</b>	<b>99</b>
<b>ZWEITER TEIL.....</b>	<b>101</b>
<b>4 MESSUNG DER GENAUIGKEIT MC-METHODEN.....</b>	<b>102</b>
<b>4.1 Portfoliogruppen.....</b>	<b>103</b>
<b>4.2 Testablauf.....</b>	<b>106</b>
<b>4.3 Zinskurvensets.....</b>	<b>108</b>
4.3.1 Zinskurvenset "Bondportfolio".....	108
4.3.2 Zinskurvenset "Optionsportfolio".....	110
4.3.3 Verteilung des Risikovektors.....	110
<b>4.4 Konfidenzintervall für den wahren VaR.....</b>	<b>111</b>
4.4.1 Beispiel zur Berechnung des Konfidenzintervalls.....	112
<b>4.5 VaR-Referenzwerte.....</b>	<b>113</b>
<b>4.6 Prozentuale Abweichung.....</b>	<b>115</b>
<b>4.7 Fehlerkennzahlen.....</b>	<b>116</b>
<b>4.8 Zusammenfassung.....</b>	<b>118</b>
<b>5 RESULTATE DER GENAUIGKEITSANALYSE.....</b>	<b>119</b>
<b>5.1 Long-Bond-Portfolio.....</b>	<b>120</b>
5.1.1 Testanordnung des LB-Portfolios.....	120
5.1.2 Testresultate des LB-Portfolios.....	121
Delta-Methode beim LB-Portfolio.....	124
Delta-Gamma-Methode beim LB-Portfolio.....	126
PCA-Grid-Methode beim LB-Portfolio.....	126
PLS-Grid-Methode beim LB-Portfolio.....	127

<b>5.2</b>	<b>Long/Short-Bond-Portfolio.....</b>	<b>128</b>
5.2.1	Testanordnung des LSB-Portfolios .....	128
5.2.2	Testresultate des LSB-Portfolios.....	128
	<i>Delta-Methode beim LSB-Portfolio .....</i>	<i>130</i>
	<i>Delta-Gamma-Methode beim LSB-Portfolio .....</i>	<i>131</i>
	<i>PCA-Methode beim LSB-Portfolio.....</i>	<i>131</i>
	<i>PLS-Grid-Methode beim LSB-Portfolio.....</i>	<i>132</i>
<b>5.3</b>	<b>Hedged-Long/Short-Bond-Portfolio .....</b>	<b>134</b>
5.3.1	Testanordnung des HLSB-Portfolios .....	134
5.3.2	Testresultate des HLSB-Portfolios.....	135
	<i>Delta-Methode beim HLSB-Portfolio .....</i>	<i>136</i>
	<i>Delta-Gamma-Methode beim HLSB-Portfolio.....</i>	<i>137</i>
	<i>PCA-Grid-Methode beim HLSB-Portfolio.....</i>	<i>137</i>
	<i>PLS-Grid-Methode beim HLSB-Portfolio.....</i>	<i>138</i>
<b>5.4</b>	<b>Short-Caplet/Floorlet-Portfolio.....</b>	<b>140</b>
5.4.1	Testanordnung des SCF-Portfolios .....	140
5.4.2	Testresultate des SCF-Portfolios.....	141
	<i>Delta-Methode beim SCF-Portfolio.....</i>	<i>142</i>
	<i>Delta-Gamma-Methode beim SCF-Portfolio.....</i>	<i>143</i>
	<i>PCA-Grid-Methode beim SCF-Portfolio .....</i>	<i>143</i>
	<i>PLS-Grid-Methode beim SCF-Portfolio.....</i>	<i>144</i>
<b>5.5</b>	<b>Digital-Option-Portfolio.....</b>	<b>145</b>
5.5.1	Testanordnung des DO-Portfolios.....	145
5.5.2	Testresultate des DO-Portfolios .....	147
	<i>Delta-Methode beim DO-Portfolio .....</i>	<i>148</i>
	<i>Delta-Gamma-Methode beim DO-Portfolio .....</i>	<i>149</i>
	<i>PCA-Grid-Methode beim DO-Portfolio.....</i>	<i>149</i>
	<i>PLS-Grid-Methode beim DO-Portfolio.....</i>	<i>150</i>
<b>5.6</b>	<b>Genauigkeit alternativer PLS-Grid-Modelle .....</b>	<b>152</b>
5.6.1	PLS-Grid-Modelle mit unterschiedlicher Anzahl Grid-Punkte .....	152
5.6.2	PLS-Grid-Modelle mit unterschiedlicher Anzahl Pre-Calculations .....	153
5.6.3	PLS-Grid-Modelle mit unterschiedlicher G/V-Ermittlung der Pre-Calculations .....	154
<b>5.7</b>	<b>Zusammenfassung.....</b>	<b>157</b>
5.7.1	Lineares Portfolio.....	157
5.7.2	Konvexes Portfolio .....	157
5.7.3	Komplexes Portfolio .....	157
<b>6</b>	<b>MESSUNG DES RECHENAUFWANDS.....</b>	<b>158</b>
<b>6.1</b>	<b>Rechenaufwände im Überblick .....</b>	<b>159</b>
<b>6.2</b>	<b>Methodenspezifischer Rechenaufwand .....</b>	<b>163</b>
6.2.1	Methodenspezifischer Rechenaufwand der Full-MC-Methode.....	163
6.2.2	Methodenspezifischer Rechenaufwand der Delta-Methode .....	163
6.2.3	Methodenspezifischer Rechenaufwand der Delta-Gamma-Methode .....	164
6.2.4	Methodenspezifischer Rechenaufwand der PCA-Grid-Methode .....	165
6.2.5	Methodenspezifischer Rechenaufwand der PLS-Grid-Methode .....	166
<b>6.3</b>	<b>Instrumentenrechenaufwände im Vergleich.....</b>	<b>168</b>
6.3.1	Rechenaufwand in Abhängigkeit preisrelevanter Faktoren.....	169
6.3.2	Rechenaufwand in Abhängigkeit der Anzahl MC-Szenarien.....	170

<b>6.4</b>	<b>Zusammenfassung</b> .....	<b>172</b>
<b>7</b>	<b>ZUSAMMENFASSUNG</b> .....	<b>173</b>
<b>7.1</b>	<b>Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Long-Bond-Portfolio</b> .....	<b>173</b>
<b>7.2</b>	<b>Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Long/Short-Bond-Portfolio</b> .....	<b>175</b>
<b>7.3</b>	<b>Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Hedged-L/S-Bond-Portfolio</b> .....	<b>176</b>
<b>7.4</b>	<b>Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Short-Caplet/Floorlet-Portfolio</b> .....	<b>177</b>
<b>7.5</b>	<b>Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Digital-Option-Portfolio</b> .....	<b>178</b>
<b>7.6</b>	<b>Schlussfolgerung</b> .....	<b>180</b>
	<b>ANHANG</b> .....	<b>181</b>
<b>8</b>	<b>TECHNISCHER ANHANG</b> .....	<b>181</b>
<b>8.1</b>	<b>Caplets und Floorlets</b> .....	<b>181</b>
<b>8.2</b>	<b>Zahlenmaterial für das Anwendungsbeispiel: Short-Caplet-Portfolio</b> .....	<b>182</b>
8.2.1	Delta des Short-Caplet-Portfolios.....	183
8.2.2	Gamma des Short-Caplet-Portfolios.....	184
<b>8.3</b>	<b>Eigenwertproblem</b> .....	<b>184</b>
8.3.1	Beweis der Risikovektor-Abbildung durch PCA-Faktoren.....	185
<b>8.4</b>	<b>Ermittlung der unterjährigen annualisierten stetigen Spotrates</b> .....	<b>187</b>
<b>8.5</b>	<b>Ermittlung der überjährigen annualisierten stetigen Spotrates</b> .....	<b>187</b>
<b>8.6</b>	<b>Bestimmung der Forwardrate</b> .....	<b>188</b>
<b>8.7</b>	<b>Zahlenmaterial für das Anwendungsbeispiel: Steepness-Bondportfolio</b> .....	<b>188</b>
<b>8.8</b>	<b>Neuberechnungen zur numerischen Schätzung der Sensitivitäten</b> .....	<b>190</b>
8.8.1	Numerische Schätzung des Delta-Vektors.....	190
8.8.2	Numerische Schätzung der Gamma-Matrix.....	191
8.8.3	Beispiel: Instrumentenneuberechnungen für Portfoliosensitivitäten.....	192
<b>9</b>	<b>ANHANG MIT TESTRESULTATEN</b> .....	<b>196</b>
<b>9.1</b>	<b>Testresultate des Long-Bond-Portfolios</b> .....	<b>196</b>
<b>9.2</b>	<b>Testresultate des Long/Short-Bond-Portfolios</b> .....	<b>198</b>
<b>9.3</b>	<b>Testresultate des Hedged-Long/Short-Bond-Portfolios</b> .....	<b>201</b>
<b>9.4</b>	<b>Testresultate des Short-Caplet/Floorlet-Portfolios</b> .....	<b>204</b>
<b>9.5</b>	<b>Testresultate des Digital-Option-Portfolios</b> .....	<b>207</b>
	<b>LITERATURVERZEICHNIS</b> .....	<b>211</b>
	<b>STICHWORTVERZEICHNIS</b> .....	<b>219</b>

## Abbildungsverzeichnis

<i>Abbildung 1-1: Genauigkeit versus Rechenaufwand</i> .....	3
<i>Abbildung 1-2: VaR-Dimensionen</i> .....	8
<i>Abbildung 2-1: G/V-Funktion eines linearen Portfolios</i> .....	23
<i>Abbildung 2-2: G/V-Funktion eines konvexen Portfolios</i> .....	24
<i>Abbildung 2-3: G/V-Funktion eines komplexen Portfolios</i> .....	24
<i>Abbildung 2-4: VaR zum Konfidenzniveau von 95%</i> .....	28
<i>Abbildung 2-5: Shortfall-VaR zum Konfidenzniveau von 95%</i> .....	32
<i>Abbildung 3-1: G/V-Funktion des Short-Caplet-Portfolios</i> .....	40
<i>Abbildung 3-2: Künstlich erzeugte versus wahre Wahrscheinlichkeitsdichte der G/V-Funktion</i> .....	41
<i>Abbildung 3-3: G/V-Funktion versus Delta-G/V-Funktion des Short-Caplet-Portfolios</i> .....	43
<i>Abbildung 3-4: G/V-Funktion versus Delta-Gamma-G/V-Funktion</i> .....	46
<i>Abbildung 3-5: G/V-Verteilungen im Vergleich</i> .....	47
<i>Abbildung 3-6: Zweidimensionaler 3x3-Grid</i> .....	50
<i>Abbildung 3-7: Beschriftung der G/V-Werte der Knotenpunkte</i> .....	53
<i>Abbildung 3-8: Grid-Approximation mit einem 3x3-Grid und linearer Interpolation</i> .....	54
<i>Abbildung 3-9: Grid-approximierte G/V-Funktion (mit fünf Grid-Punkten)</i> .....	55
<i>Abbildung 3-10: Grid-Approximationsfehler bei linearer Grid-Approximation mit 5 Grid-Punkten</i> .....	56
<i>Abbildung 3-11: Abnahme des Grid-Approximationsfehlers bei Zunahme der Grid-Punkte</i> .....	56
<i>Abbildung 3-12: Verteilung grid-approximierter G/V-Funktionen</i> .....	57
<i>Abbildung 3-13: Der erste PCA-Faktor</i> .....	59
<i>Abbildung 3-14: Zinskurve in Abhängigkeit des ersten PCA-Faktors</i> .....	72
<i>Abbildung 3-15: Zinskurve in Abhängigkeit des zweiten PCA-Faktors</i> .....	73
<i>Abbildung 3-16: Zinskurve in Abhängigkeit der Zustände des dritten PCA-Faktors</i> .....	74
<i>Abbildung 3-17: Zinskurve in Abhängigkeit des ersten PLS-Faktors <math>W_1</math></i> .....	86
<i>Abbildung 3-18: Zinskurve in Abhängigkeit des zweiten PLS-Faktors <math>W_2</math></i> .....	87
<i>Abbildung 3-19: Zinskurve in Abhängigkeit des dritten PLS-Faktors <math>W_3</math></i> .....	88
<i>Abbildung 3-20: Bildung von Subportfolios für die Marktfaktorblöcke</i> .....	92
<i>Abbildung 3-21: PLS-Grid-G/V-Funktionen der Marktfaktorblöcke (in Lokalwährung)</i> .....	93
<i>Abbildung 3-22: Berechnung der G/V-Werte auf Ebene der Subportfolios</i> .....	95
<i>Abbildung 3-23: Dichtefunktion der künstlichen G/V-Verteilung</i> .....	96
<i>Abbildung 3-24: Analyse des Marktrisikos auf Ebene der Marktfaktorblöcke</i> .....	98
<i>Abbildung 4-1: Testablauf</i> .....	107
<i>Abbildung 4-2: Fehlermessung unter verschiedenen Sichtweisen</i> .....	114
<i>Abbildung 5-1: G/V-Funktion des LB-Portfolios</i> .....	121
<i>Abbildung 5-2: G/V-Funktion des LSB-Portfolios</i> .....	128
<i>Abbildung 5-3: Neutrale Fehleranalyse (eintägiger VaR(99%); LSB-Portfolio)</i> .....	132
<i>Abbildung 5-4: G/V-Funktion des HLSB-Portfolios</i> .....	134
<i>Abbildung 5-5: Neutrale Fehleranalyse (eintägiger VaR(99%); Hedged-L/S-Bond-Portfolio)</i> .....	138
<i>Abbildung 5-6: G/V-Funktion des SCF-Portfolios</i> .....	141
<i>Abbildung 5-7: G/V-Funktion des DO-Portfolios</i> .....	147
<i>Abbildung 5-8: Fehleranalyse alternativer PLS-Grid-Modelle unter neutraler Sichtweise (zweiwöchiger VaR(99%); DO-Portfolio)</i> .....	155
<i>Abbildung 6-1: Beteiligte Systeme der VaR-Berechnung</i> .....	159
<i>Abbildung 7-1: Genauigkeit versus Rechenaufwand (Eintägiger VaR (99%); LB-Portfolio)</i> .....	173
<i>Abbildung 7-2: Genauigkeit versus Rechenaufwand (Eintägiger VaR(99%); LSB-Portfolio)</i> .....	175

<i>Abbildung 7-3: Genauigkeit versus Rechenaufwand (Eintägiger VaR(99%); HLSB-Portfolio) .....</i>	<i>176</i>
<i>Abbildung 7-4: Genauigkeit versus Rechenaufwand (Eintägiger VaR(99%); SCF-Portfolio).....</i>	<i>177</i>
<i>Abbildung 7-5: Genauigkeit versus Rechenaufwand (Eintägiger VaR(99%);DO-Portfolio).....</i>	<i>178</i>
<i>Abbildung 8-1: Die Korrelationsmatrix der USD-Zinskurve.....</i>	<i>188</i>

## Tabellenverzeichnis

<i>Tabelle 1-1: Ausgewählte Delta-Gamma-Methoden</i> .....	4
<i>Tabelle 2-1: Bausteine der Marktrisikomessung</i> .....	13
<i>Tabelle 3-1: VaR-Schätzung bei unterschiedlicher Anzahl MC-Szenarien</i> .....	41
<i>Tabelle 3-2: VaR-Resultate im Überblick</i> .....	46
<i>Tabelle 3-3: Grid-Tabelle mit den G/V-Werten für die neun Knotenpunkte</i> .....	52
<i>Tabelle 3-4: Zunehmende Genauigkeit bei zunehmender Anzahl Grid-Punkte</i> .....	58
<i>Tabelle 3-5: Anzahl Berechnungen in Abhängigkeit der Anzahl Marktfaktoren und Grid-Punkte</i> .....	58
<i>Tabelle 3-6: Typische PCA-Zinskurvenbewegungen</i> .....	65
<i>Tabelle 3-7: Anwendung der PCA-Methode zur Beschreibung der Zinsstrukturdynamik</i> .....	66
<i>Tabelle 3-8: Erwartete Zinskurver zum Zeitpunkt T</i> .....	68
<i>Tabelle 3-9: Zusammensetzung des Twist-Bondportfolios</i> .....	74
<i>Tabelle 3-10: G/V-Werte aufgrund ausgewählter Zustände der Zinskurve</i> .....	76
<i>Tabelle 3-11: Ablauf der PLS-Grid-Methode</i> .....	77
<i>Tabelle 3-12: G/V-Werte aufgrund ausgewählter PLS-Faktorzustände</i> .....	89
<i>Tabelle 4-1: Portfoliogruppen im Überblick</i> .....	103
<i>Tabelle 4-2: Fristigkeiten der Spotrates des Zinskurvensets "Bondportfolio"</i> .....	108
<i>Tabelle 4-3: Spotrates der kurzfristigen Zinskurve</i> .....	110
<i>Tabelle 4-4: Rangzahlen zentraler zweiseitiger Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau von 95%</i> .....	112
<i>Tabelle 5-1: Anordnung der Resultate der getesteten Portfoliogruppen</i> .....	119
<i>Tabelle 5-2: Zusammensetzung des LB-Portfolios</i> .....	120
<i>Tabelle 5-3: Fehleranalyse * auf Währungsebene (eintägiger VaR(99%); LB-Portfolio)</i> .....	122
<i>Tabelle 5-4: Eintägiger VaR(99%) des LB-Portfolios</i> .....	124
<i>Tabelle 5-5: Fehleranalyse * auf Währungsebene (eintägiger VaR(99%); LSB-Portfolio)</i> .....	129
<i>Tabelle 5-6: Eintägiger VaR(99%) des LSB-Portfolios</i> .....	130
<i>Tabelle 5-7: Fehleranalyse * auf Währungsebene (eintägiger VaR(99%); HLSB-Portfolio)</i> .....	135
<i>Tabelle 5-8: Eintägiger VaR(99%) des HLSB-Portfolios</i> .....	136
<i>Tabelle 5-9: Zusammensetzung des SCF-Portfolios</i> .....	140
<i>Tabelle 5-10: Eintägiger VaR(99%) des SCF-Portfolios</i> .....	142
<i>Tabelle 5-11: Zusammensetzung des DO-Portfolios</i> .....	146
<i>Tabelle 5-12: Eintägiger VaR(99%) des DO-Portfolios</i> .....	148
<i>Tabelle 5-13: Alternative Grid-Modellierung (Eintägiger VaR(99%); DO-Portfolio)</i> .....	152
<i>Tabelle 5-14: 5x3x3-PLS-Grid (eintägiger VaR(99%); DO-Portfolio)</i> .....	153
<i>Tabelle 5-15: PLS-Grid-Modell mit 100 Pre-Calculations (zweiwöchiger VaR(99%); DO-Portfolio)</i> .....	154
<i>Tabelle 5-16: PLS-Grid-Modell mit 100 delta-gamma-approximierten Pre-Calculations (zweiwöchiger VaR(99%); DO-Portfolio)</i> .....	155
<i>Tabelle 6-1: Rechenaufwände für das Referenzportfolio</i> .....	161
<i>Tabelle 6-2: Methodenspezifischer Rechenaufwand der Full-MC-Methode</i> .....	163
<i>Tabelle 6-3: Methodenspezifischer Rechenaufwand der Delta-Methode</i> .....	164
<i>Tabelle 6-4: Methodenspezifischer Rechenaufwand der Delta-Gamma-Methode</i> .....	165
<i>Tabelle 6-5: CPU-Zeiten für lineare Grid-Interpolationen (in Sekunden)</i> .....	165
<i>Tabelle 6-6: Methodenspezifischer Rechenaufwand der PCA-Grid-Methode</i> .....	166
<i>Tabelle 6-7: Methodenspezifischer Rechenaufwand der PLS-Grid-Methode</i> .....	167
<i>Tabelle 6-8: Instrumentenrechenaufwand<sup>i)</sup> prozentual zur Full-MC-Methode<sup>ii)</sup></i> .....	168
<i>Tabelle 6-9: Rechenaufwand<sup>i)</sup> in Abhängigkeit preisrelevanter Faktoren<sup>ii)</sup></i> .....	170
<i>Tabelle 6-10: Relativer Rechenaufwand<sup>i)</sup> in Abhängigkeit der Anzahl MC-Szenarien</i> .....	170

<i>Tabelle 7-1: Genauigkeit versus Rechenaufwand beim LB-Portfolio</i> .....	174
<i>Tabelle 7-2: Genauigkeit versus Rechenaufwand beim LSB-Portfolio</i> .....	176
<i>Tabelle 7-3: Genauigkeit versus Rechenaufwand beim HLSB-Portfolio</i> .....	177
<i>Tabelle 7-4: Genauigkeit versus Rechenaufwand beim SCF-Portfolio</i> .....	178
<i>Tabelle 7-5: Genauigkeit versus Rechenaufwand für das DO-Portfolio</i> .....	179
<i>Tabelle 7-6: Testergebnisse auf einem Blick</i> .....	180
<i>Tabelle 8-1: Legende zu Caplet-Bewertungsformel</i> .....	182
<i>Tabelle 8-2: Detailspezifikationen des Short-Caplet-Portfolios</i> .....	182
<i>Tabelle 8-3: Daten der USD-Zinskurve (1. Januar 1992)</i> .....	188
<i>Tabelle 8-4: Eigenwerte der Korrelationsmatrix der USD-Zinskurve</i> .....	189
<i>Tabelle 8-5: Normierte Eigenvektoren der Korrelationsmatrix der USD-Zinskurve</i> .....	189
<i>Tabelle 8-6: Werte der PCA-Ladungsmatrix</i> .....	190
<i>Tabelle 8-7: Werte der PLS-Ladungsmatrix</i> .....	190
<i>Tabelle 8-8: Anzahl Instrumentenberechnungen zur numerischen Schätzung des Delta-Vektors</i> .....	193
<i>Tabelle 8-9: Anzahl Instrumentenberechnungen zur numerischen Schätzung der Gammas</i> .....	194
<i>Tabelle 8-10: Anzahl Instrumentenberechnungen zur numerischen Schätzung der Kreuz-Gammas</i> .....	194
<i>Tabelle 9-1: Eintägiger VaR(95%) des LB-Portfolios</i> .....	196
<i>Tabelle 9-2: Zweiwöchiger VaR(95%) des LB-Portfolios</i> .....	197
<i>Tabelle 9-3: Zweiwöchiger VaR(99%) des LB-Portfolios</i> .....	197
<i>Tabelle 9-4: Eintägiger VaR(95%) des LSB-Portfolios</i> .....	198
<i>Tabelle 9-5: Zweiwöchiger VaR(95%) des LSB-Portfolios</i> .....	199
<i>Tabelle 9-6: Zweiwöchiger VaR(99%) des LSB-Portfolios</i> .....	200
<i>Tabelle 9-7: Eintägiger VaR(95%) des HLSB-Portfolios</i> .....	201
<i>Tabelle 9-8: Zweiwöchiger VaR(95%) des HLSB-Portfolios</i> .....	202
<i>Tabelle 9-9: Zweiwöchiger VaR(99%) des HLSB-Portfolios</i> .....	203
<i>Tabelle 9-10: Eintägiger VaR(95%) des SCF-Portfolios</i> .....	204
<i>Tabelle 9-11: Zweiwöchiger VaR(95%) des SCF-Portfolios</i> .....	205
<i>Tabelle 9-12: Zweiwöchiger VaR(99%) des SCF-Portfolios</i> .....	206
<i>Tabelle 9-13: Eintägiger VaR(95%) des DO-Portfolios</i> .....	207
<i>Tabelle 9-14: Zweiwöchiger VaR(95%) des DO-Portfolios</i> .....	208
<i>Tabelle 9-15: Alternative PLS-Grid-Modelle (Zweiwöchiger VaR(95%); DO-Portfolio)</i> .....	209
<i>Tabelle 9-16: Zweiwöchiger VaR(99%) des DO-Portfolios</i> .....	210

## Abkürzungsverzeichnis

AIB	Anzahl Instrumentenberechnungen
Bp	Basispunkt
CHF	Schweizer Franken
CPU	Central Processing Unit (Hauptprozessor)
DEM	Deutsche Mark
DG	Delta-Gamma
DO-Portfolio	Digital-Option-Portfolio
EUR	Euro
FMC	Full-Monte-Carlo-Methode
Full-MC-Methode	Full-Monte-Carlo-Methode
G/V	Gewinn/Verlust
GARCH	Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
GBP	Britisches Pfund
GE	Geldeinheit
GP	Grid-Punkt
HLSB-Portfolio	Hedged-Long/Short-Bond-Portfolio
JPY	Japan Yen
LB-Portfolio	Long-Bond-Portfolio
LIBOR	London Interbank Offered Rate
LPM	Lower Partial Moment
LSB-Portfolio	Long/Short-Bond-Portfolio
MAPE	Mean Absolute Percentage Error
MC-Simulation	Monte-Carlo-Simulation
MHz	Megahertz
NB	Neubewertung
neut	Neutral
opt	Optimistisch
p.a.	per annum
PCA	Principal Component Analysis (Hauptkomponentenverfahren)
pess	Pessimistisch
PLS	Partial Least Squares
RMSPE	Root Mean Squared Percentage Error
SCF-Portfolio	Short-Caplet/Floorlet-Portfolio
Sek.	Sekunde
STD	Standardabweichung

Stk.	Stück
SVaR	Shortfall-Value-at-Risk
USD	US-Dollar
VaR	Value-at-Risk

## Verzeichnis mathematischer und statistischer Symbole

$E(X)$	Erwartungswert der Zufallsvariablen $X$
$\text{Var}(X)$	Varianz der Zufallsvariablen $X$
$\text{Cov}(X, Y)$	Kovarianz der Zufallsvariablen $X$ und $Y$
$\text{Pr}(X)$	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $X$
$N(\mu, \sigma^2)$	Normalverteilung mit den Parametern: Erwartungswert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$
$N_M(\underline{\mu}, \underline{\Sigma})$	$M$ -dimensionale Normalverteilung mit den Parametern: Erwartungsvektor $\underline{\mu}$ und Kovarianzmatrix $\underline{\Sigma}$
$\sigma_X$	Standardabweichung der Zufallsvariablen $X$
$\rho_{X,Y}$	Korrelationskoeffizient der Zufallsvariablen $X$ und $Y$
$dF_X(x)$	Dichtefunktion der Zufallsvariablen $X$
$F_X(x)$	Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $X$
$\Phi(\cdot)$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
$\phi(\cdot)$	Dichtefunktion der Standardnormalverteilung
$z_\alpha$	$\alpha$ -Quantil der Standardnormalverteilung
$\sup X$	Supremum der nicht leeren Menge $X$
$\inf X$	Infimum der nicht leeren Menge $X$
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\lfloor x \rfloor$	Ganzzahliger Anteil der Zahl $x$
$ x $	Absolutbetrag der Zahl $x$
$\exp(\cdot)$	Exponentialfunktion
$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right _a$	Erste partielle Ableitung der Funktion $f(x, y)$ nach $x$ an der Stelle $a$
$\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \right _{(a, b)}$	Zweite partielle Ableitung der Funktion $f(x, y)$ zunächst nach $x$ an der Stelle $a$ , dann nach $y$ an der Stelle $b$
$\sum_{i=1}^n$	Summe, in dem $i$ (Laufindex) von 1 bis $n$ läuft
$\prod_{i=1}^n$	Produkt, in dem $i$ (Laufindex) von 1 bis $n$ läuft
$\mathbf{0}$	Nullvektor

$\mathbf{X}$	Vektor
$\underline{\underline{\mathbf{X}}}$	Matrix
$\underline{\underline{\mathbf{X}}}^T$	Transponierte Matrix
$\  \mathbf{X} \ $	Euklidische Norm des Vektors $\mathbf{X}$
$\underline{\underline{\mathbf{I}}}$	Einheitsmatrix
$\text{diag}(\mathbf{X})$	Diag-Operator, liefert zu einem $(M \times 1)$ -Vektor $\mathbf{X}$ eine $(M \times M)$ -Diagonalmatrix
$\det(\underline{\underline{\mathbf{X}}})$	Determinante der quadratischen Matrix $\underline{\underline{\mathbf{X}}}$
$\neq$	Ungleich, verschieden von
$\wedge$	Konjunktion, logisches UND
$\forall x$	Für alle Elemente $x$
$\{x p(x)\}$	Menge aller $x$ mit der Eigenschaft $p(x)$
$\{x : p(x)\}$	Menge aller $x$ mit der Eigenschaft $p(x)$

## Wichtige Symbole dieser Arbeit

$T$	Haltedauer, bzw. Ende des Betrachtungszeitraums $[0, T]$
$M$	Anzahl der Marktfaktoren
$X_i$	$i$ -ter zufälliger Marktfaktor für den Zeitpunkt $T$
$\mathbf{X}$	Marktvektor: $(M \times 1)$ -Vektor der zufälligen Marktfaktoren $X_i$ , $i = 1, \dots, M$ zum Zeitpunkt $T$
$x_i$	Ausprägung des $i$ -ten Marktfaktors zum Zeitpunkt $T$
$\mathbf{x}$	$(M \times 1)$ -Vektor der Ausprägungen des Marktvektors $\mathbf{X}$
$\bar{X}_i$	Erwartungswert des $i$ -ten Marktfaktors zum Zeitpunkt $T$
$\bar{\mathbf{X}}$	Erwartungswert des Marktvektors zum Zeitpunkt $T$
$S_i$	$i$ -te zufällige Risikokomponente zum Zeitpunkt $T$ definiert durch $S_i = X_i - \bar{X}_i$
$\mathbf{S}$	Risikovektor: $(M \times 1)$ -Vektor der zufälligen Risikokomponenten $S_i$ , $i = 1, \dots, M$ zum Zeitpunkt $T$
$s_i$	Ausprägung der $i$ -ten Risikokomponente
$\mathbf{s}$	Ausprägung des Risikovektors $\mathbf{S}$
$\underline{\underline{\Sigma}}$	Kovarianzmatrix: $(M \times M)$ -Matrix der Kovarianzen der Risikokomponenten.
$\sigma_i$	Standardabweichung der $i$ -ten Risikokomponente $S_i$
$\rho_{i,j}$	Korrelation von $S_i$ und $S_j$
$\sigma_{i,j}$	Kovarianz von $S_i$ und $S_j$
$P(\mathbf{X})$	Bewertungsfunktion des Portfolios zum Zeitpunkt $T$ in Abhängigkeit des Marktvektors $\mathbf{X}$
$P^{Plan}$	Geplanter Portfoliowert zum Zeitpunkt $T$
$\Delta P(\mathbf{S})$	G/V-Funktion des Portfolios zum Zeitpunkt $T$ in Abhängigkeit des Risikovektors $\mathbf{S}$
$\Delta p$	G/V-Wert (Ausprägung von $\Delta P$ )
$\delta$	(Portfolio-) Delta-Vektor: $(M \times 1)$ -Vektor der (Portfolio-) Deltas $\delta_i$ , $i = 1, \dots, M$ .
$\underline{\underline{\Gamma}}$	(Portfolio-) Gamma-Matrix: $(M \times M)$ -Matrix der (Portfolio-) Gammas $\gamma_{i,j}$ , $i, j = 1, \dots, M$
$R_3$	Restglied mit Termen dritter und höherer Ordnung
$\Delta P^{Del}$	Delta-(approximierte-)G/V-Funktion
$\Delta P^{DG}$	Delta-Gamma-(approximierte-)G/V-Funktion
$F_{\Delta P}(y)$	G/V-Verteilung

$F_{\Delta P}^{-1}(\alpha)$	$\alpha$ -Quantil der G/V-Verteilung
$VaR(1-\alpha)$	Value-at-Risk zum Konfidenzniveau von $(1-\alpha)$
$\alpha$	Irrtumswahrscheinlichkeit
$\tau$	Shortfall-Target
$LPM_n(\tau)$	Lower-Partial-Moment $n$ -ter Ordnung der G/V-Verteilung für den Shortfall-Target $\tau$
$SVaR$	Shortfall-Value-at-Risk
$\mathbf{s}_{\bullet,j}$	$(M \times 1)$ -Vektor mit den Ausprägungen der Risikokomponenten $s_{i,j}$ , $i = 1, \dots, M$ für das $j$ -te Marktszenario
$\mathbf{x}_{\bullet,j}$	$(M \times 1)$ -Vektor mit den Ausprägungen der Marktfaktoren $x_{i,j}$ , $i = 1, \dots, M$ für das $j$ -te Marktszenario
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$(M \times 1)$ -Vektor mit unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen
$\underline{\mathbf{L}}$	$(M \times M)$ -Linksmatrix aus der Cholesky-Zerlegung der Kovarianzmatrix: $\underline{\boldsymbol{\Sigma}} = \underline{\mathbf{L}} \cdot \underline{\mathbf{L}}^\top$
$\Delta p_j$	G/V-Wert des $j$ -ten Marktszenarios
$dF_{\Delta P}$	Wahrscheinlichkeitsdichte der G/V-Funktion
$F_{\Delta P}^{FMC}(y)$	Durch Full-MC-Simulation geschätzte G/V-Verteilung
$(F_{\Delta P}^{FMC})^{-1}(\alpha)$	Durch Full-MC-Simulation geschätztes $\alpha$ -Quantil
$VaR^{FMC}$	VaR der Full-MC-Methode
$z_{1-\alpha}$	$(1-\alpha)$ -Quantil der Standardnormalverteilung
$S_i^{GP}(j)$	$j$ -ter Grid-Punkt der $i$ -ten Risikokomponenten
$\Delta P^{Grid}$	Grid-G/V-Funktion
$A^{Grid}$	Abweichung der Grid-G/V-Funktion von der wahren G/V-Funktion
$\hat{S}_i$	$i$ -te standardisierte Risikokomponente
$\hat{\mathbf{S}}$	$(M \times 1)$ -Vektor mit den standardisierten Risikokomponenten
$\underline{\mathfrak{R}}$	Korrelationsmatrix: $(M \times M)$ -Matrix mit den Korrelationskoeffizienten der Risikokomponenten
$\hat{H}_i$	$i$ -ter PCA-Faktor (Hauptkomponente, bzw. normierte Hauptachse)
$\hat{\mathbf{H}}$	$(M \times 1)$ -Vektor der PCA-Faktoren
$\underline{\hat{\boldsymbol{\Lambda}}}$	$(M \times M)$ -Diagonalmatrix der Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_M$ der Korrelationsmatrix $\underline{\mathfrak{R}}$
$\underline{\hat{\mathbf{U}}}$	$(M \times M)$ -Matrix mit den spaltenweise angeordneten normierten Eigen-

	vektoren der Korrelationsmatrix $\underline{\mathfrak{R}}$
$\hat{u}_{\bullet,i}$	$i$ -ter normierter Eigenvektor der Korrelationsmatrix $\underline{\mathfrak{R}}$
$N^{PCA}$	Anzahl PCA-Faktoren
$\mathbf{S}^{PCA(N^{PCA})}$	$(M \times 1)$ -Vektor der den Risikovektors $\mathbf{S}$ mit Hilfe von $N^{PCA}$ PCA-Faktoren approximiert
$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{PCA(N^{PCA})}$ =	PCA-Ladungsmatrix: $(M \times N^{PCA})$ -Matrix der Faktorladungen von $\hat{H}_i$ , $i = 1, \dots, N^{PCA}$ .
$\hat{\mathbf{H}}^{PCA(N^{PCA})}$	PCA-Vektor: $(N^{PCA} \times 1)$ -Vektor der ersten $N^{PCA}$ PCA-Faktoren
$\Delta P^{PCA-Grid}$	PCA-Grid-G/V-Funktion
$A^{PCA-Grid}$	Abweichung der PCA-Grid-G/V-Funktion von der wahren G/V-Funktion
$NW_A$	Nominalbetrag des Bonds A
$LZ_A$	Laufzeit des Bonds A
$N^{PC}$	Anzahl Pre-Calculations
$\Delta \mathbf{p}$	$(1 \times N^{PC})$ -Vektor der G/V-Werte $\Delta p_i$ , $i = 1, \dots, N^{PC}$ der Pre-Calculations
$N^{PLS}$	Anzahl PLS-Faktoren
$\mathbf{S}^{PLS(N^{PLS})}$	$(M \times 1)$ -Vektor der den Risikovektors $\mathbf{S}$ mit Hilfe von $N^{PLS}$ PLS-Faktoren approximiert
$W_i$	$i$ -ter standardisierter PLS-Faktor
$\mathbf{W}^{PLS(N^{PLS})}$	PLS-Vektor: $(N^{PLS} \times 1)$ -Vektor der ersten $N^{PLS}$ PLS-Faktoren
$\hat{\boldsymbol{\beta}}^{PLS(N^{PLS})}$ =	PLS-Ladungsmatrix: $(M \times N^{PLS})$ -Matrix der Faktorladungen von $W_i$ , $i = 1, \dots, N^{PLS}$ .
$\Delta P^{PLS-Grid}$	PLS-Grid-G/V-Funktion
$VaR^{Min}$	Untere Grenze des Konfidenzintervalls für den wahren VaR zum Konfidenzniveau von 95%
$VaR^{Max}$	Untere Grenze des Konfidenzintervalls für den wahren VaR zum Konfidenzniveau von 95%
$VaR^{Ref}$	Referenzwert. $VaR^{Ref} \in \{VaR^{Min}, VaR^{FMC}, VaR^{Max}\}$
$VaR^*$	Der durch die *-Methode ermittelte VaR
$Error$	Abweichung vom $VaR^*$ vom $VaR^{Ref}$
$\%Error$	Prozentuale Abweichung vom $VaR^*$ vom $VaR^{Ref}$
$VaR_i^*$	Der durch die *-Methode für das $i$ -te Testportfolio ermittelte VaR
$\%A^0$	Prozentualer Anteil der exakt berechneten VaR-Resultate
$\%A^-$	Prozentualer Anteil der unterschätzten VaR-Resultate
$\%A^+$	Prozentualer Anteil der überschätzten VaR-Resultate

$MW^-$	Betragsmässiger Durchschnitt der prozentualen VaR-Unterschätzungen
$STD^-$	Standardabweichung der prozentualen VaR-Unterschätzungen
$MW^+$	Betragsmässiger Durchschnitt der prozentualen VaR-Überschätzungen
$STD^+$	Standardabweichung der prozentualen VaR-Überschätzungen
$MAPE$	Mean Absolute Percentage Error
$RMSPE$	Root Mean Squared Percentage Error
$A$	Anzahl Instrumente eines Portfolios
$A_i$	Anzahl Instrumente, deren Preise von $i$ verschiedenen Marktfaktoren abhängen
$AIB$	Anzahl Instrumentenberechnungen
$GP_i$	Anzahl der Grid-Punkte des $i$ -ten Faktors

## Abkürzungsverzeichnis der getesteten Monte-Carlo-Methoden

Abkürzung	Beschreibung der Methode
Delta	Delta-Monte-Carlo-Methode
Del-Gam/DG	Delta-Gamma-Monte-Carlo-Methode
PCA-1	PCA-Grid-Monte-Carlo-Methode. Erster PCA-Faktor: 7 Grid-Punkte (GP). <sup>1)</sup>
PCA-2	7x5-PCA-Grid (Erster Faktor: 7 GP, zweiter Faktor: 5 GP)
PCA-3	7x5x3-PCA-Grid
PCA-4	7x5x3x3-PCA-Grid
PCA-5	7x5x3x3x3-PCA-Grid
PCA-6	7x5x3x3x3x3-PCA-Grid
PCA-7	7x5x3x3x3x3x3-PCA-Grid
PLS-1	PLS-Grid-MC-Methode. Erster PLS-Faktor: 7 GP. Zur Ermittlung der PLS-Faktoren dient ein Pre-Calculation-Datenset mit 500 Full-Mont-Carlo-Szenarien (Neubewertung).
PLS-2	7x5-PLS-Grid
PLS-3	7x5x3-PLS-Grid
PLS-4	7x5x3x3-PLS-Grid
PLS-5	7x5x3x3x3-PLS-Grid
PLS-6	7x5x3x3x3x3-PLS-Grid
PLS-7	7x5x3x3x3x3x3-PLS-Grid
PLS(5)-1	PLS-Grid-Monte-Carlo-Methode. Erster PLS-Faktor: 5 GP. Pre-Calculation-Datenset mit 500 Full-MC-Szenarien (Neubewertung)
PLS(5)-2	5x3 PLS-Grid
PLS(5)-3	5x3x3 PLS-Grid
PLS(5)-4	5x3x3x3 PLA-Grid
PLS*-1	PLS-Grid-Monte-Carlo-Methode. Erster PLS-Faktor: 7 GP. Pre-Calculation-Datenset mit 100 Full-MC-Szenarien (Neubewertung).
PLS*-2	7x5-PLS-Grid
PLS*-3	7x5x3-PLS-Grid
PLS*-4	7x5x3x3-PLS-Grid
PLS**-1	PLS-Grid-Monte-Carlo-Methode. Erster PLS-Faktor: 7 GP. Pre-Calculation-Datenset mit 100 Delta-Gamma-approximierten Monte-Carlo-Szenarien
PLS**-2	7x5-PLS-Grid
PLS**-3	7x5x3-PLS-Grid
PLS**-4	7x5x3x3-PLS-Grid

i) Bei sämtlichen Grid-Approximationen sind die Grid-Punkte jeweils äquidistant im Bereich [-4, 4] angeordnet, wobei die Faktoren standardisiert sind (D.h. die Standardabweichung der Faktoren beträgt 1, so dass die äussersten Grid-Punkte vier Standardabweichungen vom Erwartungswert entfernt sind).



## 1 Einleitung

Für Banken, Versicherungen und andere Unternehmen, die bedeutende *Finanzpositionen*<sup>1</sup> halten, ist die *Marktrisikomessung* von zentraler Bedeutung. Sie liefert den Entscheidungsträgern wichtige Informationen zur Bewirtschaftung und Überwachung ihrer von Marktrisiken betroffenen Finanzpositionen.

Als *Marktrisiken* werden dabei potenzielle Wertverluste von Finanzpositionen aufgrund von Preisveränderungen an den Finanzmärkten bezeichnet. Man unterscheidet grob zwischen Aktienkurs-, Zinsänderungs-, Währungs- und Rohstoffpreisrisiken.

Zur Quantifizierung der Marktrisiken stehen unterschiedliche Risikomasse zur Verfügung. Als Standardmass hat sich der *Value-at-Risk* (VaR) durchgesetzt, mit dem Marktrisiken verschiedener Anlageklassen einfach zusammengefasst und einheitlich beschrieben werden können. Obwohl das Konzept der VaR-Messung in der Theorie besticht, kann dessen praktische Umsetzung mit verschiedenen Schwierigkeiten verbunden sein.<sup>2</sup> Nicht nur dass die dem Konzept zu Grunde liegenden Annahmen eine starke Vereinfachung der komplexen Abläufe und Zusammenhänge der realen Finanzmärkte darstellen, sondern auch deren technische Umsetzung kann in der Praxis zu Problemen führen.

---

<sup>1</sup> Z.B. Engagements in Aktien-, Zins-, Devisenprodukten

<sup>2</sup> Vgl. Beder (1995); Hendricks (1996); Marshall/Siegel (1997); Gibson (1997); Gizycki/Hereford (1998); Zimmermann (1999)

## 1.1 VaR-Methoden: Genauigkeit versus Rechenaufwand

Diese Arbeit konzentriert sich speziell auf die praxisrelevante Frage, wie Genauigkeiten und Rechenaufwände<sup>3</sup> von VaR-Methoden zusammenhängen. Da der Zeitfaktor im Finanzgeschäft eine bedeutende Rolle spielt, ist es notwendig, dass die Risikomessung innerhalb einer sinnvollen Frist durchgeführt werden kann, damit frühzeitig allfällige risikomindernde Massnahmen eingeleitet werden können. Nun ist es leider so, dass VaR-Methoden mit hoher Schätzgenauigkeit auch sehr rechenaufwändig sind. In der Praxis muss deshalb ein geeigneter Trade-off zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand getroffen werden.

Unter den VaR-Methoden ist die parametrische *RiskMetrics-Methode* die rechengünstigste, da sie den VaR-Wert in einer geschlossenen analytischen Form bestimmen kann. Aufgrund der unterstellten Annahmen ist sie jedoch in ihrer Anwendbarkeit stark eingeschränkt. So unterstellt die Methode erstens multivariat-normalverteilte *Marktfaktoränderungen*<sup>4</sup> und zweitens einen linearen Zusammenhang zwischen dem Portfoliopreis und den Marktfaktoränderungen. Diese vereinfachenden Annahmen sind aber nicht immer zulässig. So verletzt ein optionslastiges Portfolio in der Regel die Annahme eines linearen Zusammenhangs zwischen Marktfaktor- und Preisänderung eines Portfolios und falls die Risikomessung über einen längeren Zeitraum<sup>5</sup> vorgenommen werden soll, muss die vereinfachende Annahme normalverteilter Marktfaktoränderungen ebenfalls kritisch hinterfragt werden.

Keine diesbezüglichen Einschränkungen gelten hingegen bei der *Full-Monte-Carlo-Methode* (Full-MC-Methode).<sup>6</sup> Sie kann auf Portfolios mit beliebig komplizierten *Gewinn/Verlust-Funktionen* (G/V-Funktionen) angewandt werden und setzt auch bezüglich der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Marktfaktoren kaum Grenzen. Weil aber die Full-MC-Methode sehr rechenintensiv ist, bleibt ihr Einsatz oft auf nicht-zeitkritische Risikomessungen beschränkt.<sup>7</sup>

Chishti (1999) rechnet vor:<sup>8</sup> Wird die Full-MC-Methode mit 5'000 Szenarien durchgeführt, um den VaR eines Portfolios mit 1'000 komplexen Instrumenten<sup>9</sup> zu bestimmen, werden

---

<sup>3</sup> In englischsprachiger Literatur auch mit "Computational Time" oder "Speed" bezeichnet.

<sup>4</sup> Um das Marktrisiko eines Portfolios zu quantifizieren, müssen die preisrelevanten Marktfaktoren identifiziert werden. Preisrelevante Marktfaktoren können z.B. Zinssätze, Aktienpreise, Wechselkurse oder Rohstoffpreise sein, je nachdem, welche Finanzinstrumente im Portfolio enthalten sind. Vgl. 2.1 Identifikation der Marktfaktoren, S. 15

<sup>5</sup> >10 Handelstage

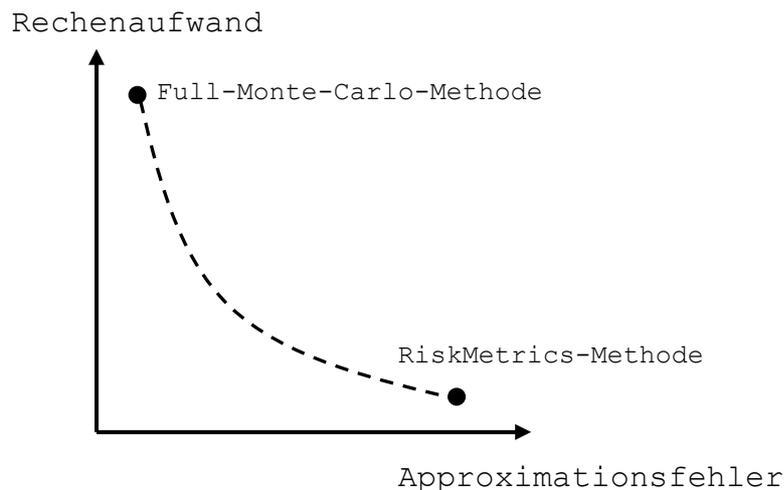
<sup>6</sup> Monte-Carlo-Simulationen mit Neubewertungen des Portfolios. Vgl. 3.1 Full-MC-Methode, S. 35

<sup>7</sup> Vgl. Glasserman/Heidelberger/Shahabuddin (2000a); Frye (1998); Jamshidian/Zhu (1997); Pritsker/Gibson (2000)

<sup>8</sup> Vgl. Chishti (1999), S. 41

dafür 1 Million Rechensekunden benötigt, vorausgesetzt jedes Instrument braucht im Durchschnitt 0.2 Sekunden zur Preisermittlung. Steht ein Parallelrechner mit 35 Prozessoren zur Verfügung, so dauert die Berechnung annähernd acht Stunden. Eine MC-Simulation mit 100'000 Szenarien würde sogar über sechseinhalb Tage ununterbrochener Rechenzeit in Anspruch nehmen.

Abbildung 1-1: Genauigkeit versus Rechenaufwand



Wie in Abbildung 1-1 dargestellt, bilden die RiskMetrics-Methode und die Full-MC-Methode bzgl. Genauigkeit und Rechenaufwand die beiden Extreme. Dazwischen liegen die übrigen VaR-Methoden, wobei die Beziehung gilt: Je grösser der Rechenaufwand, desto kleiner der Approximationsfehler, bzw. desto genauer die VaR-Schätzung.<sup>10</sup>

### 1.1.1 Entwicklung der VaR-Methoden

Pritsker (1996) war der Erste, der sich quantitativ mit der Genauigkeit und dem Rechenaufwand von VaR-Methoden auseinander setzte. Seit seiner Arbeit sind aber eine Reihe neuer VaR-Methoden entwickelt worden, die genauer als die RiskMetrics-Methode sind, aber weniger Rechenaufwand als die Full-MC-Methode erfordern.

Betrachtet man nur die (Weiter-) Entwicklungen der VaR-Methodik, die zum Ziel hat, ein günstiges Verhältnis zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand herzustellen, so lassen sich grob drei Forschungsrichtungen ausmachen:

<sup>9</sup> Instrumente, die zeitintensive Bewertungsfunktionen, wie z.B. Lattice-Methoden - vgl. Cox/Ross/Rubinstein (1979); Rubinstein (1994) - oder MC-Simulationen - vgl. Boyle (1977) - erfordern. Beispiele solcher Instrumente sind Callable oder Convertible Bonds, Amerikanische Optionen, Bermudan Swaptions

<sup>10</sup> Vgl. Gibson (1997), S. 122-124

- *Parametrische Delta-Gamma-Methoden*
- *MC-Methoden mit Varianz-Reduktionstechniken*
- *MC-Methoden auf der Basis von G/V-Approximationen*

### **Parametrische Delta-Gamma-Methoden**

Parametrische Delta-Gamma-Methoden können als Weiterentwicklungen der RiskMetrics-Methode betrachtet werden und sind wie diese sehr rechengünstig. Formal werden bei den parametrischen Delta-Gamma-Methoden zur Approximation der G/V-Funktion neben den linearen auch die quadratischen Terme der *Taylor-Reihe* berücksichtigt.<sup>11</sup> Dadurch können auch die Konvexitätseigenschaften von Portfolios abgebildet werden, die z.B. bei Optionsportfolios ausgeprägt sein können.

Kritisch anzumerken ist, dass die parametrischen Delta-Gamma-Methoden ebenfalls auf der Annahme normalverteilter Marktfaktoränderungen basieren und deshalb keinen Spielraum in Bezug auf alternative Marktfaktormodellierungen zulassen. Zudem muss beachtet werden, dass durch den Einbezug der Gamma-Terme die Normalverteilungseigenschaft der G/V-Funktion nicht mehr garantiert ist, so dass der VaR nicht mehr einfach vom entsprechenden Quantil der Standardnormalverteilung abgeleitet werden kann,<sup>12</sup> sondern mit speziellen Techniken gefunden werden muss.<sup>13</sup> Einige der wichtigsten parametrischen Delta-Gamma-Methoden sind in der Tabelle 1-1 aufgeführt.

*Tabelle 1-1: Ausgewählte Delta-Gamma-Methoden*

Zangari (1996a)	Der VaR wird mit Hilfe einer Cornish-Fisher-Entwicklung geschätzt.
Zangari (1996b)	Bestimmung des VaR unter Anwendung der Johnson-Verteilung, die in den ersten vier Momenten mit der G/V-Verteilung des Portfolios übereinstimmt.
Britten Jones/ Schäfer (1997)	Schätzung des VaR mit einer Zentralen Chi-Quadrat-Verteilung, deren erste drei Momente mit der G/V-Verteilung übereinstimmt.
Rouvinez (1997)	Berechnung des VaR durch numerische Inversion der charakteristischen G/V-Funktion.

Weitere parametrische Delta-Gamma-Methoden finden sich z.B. auch bei Albanese/Seco (1997), Cardenas et. al (1997) und El Jahl/Perraudin/Sellin (1997). Eine ausführliche Dis-

<sup>11</sup> Vgl. Taylor-Reihe, S. 22

<sup>12</sup> Wie es bei der RiskMetrics-Methode möglich ist. Vgl. Gleichung (3-13), S. 44

<sup>13</sup> Eine ausführliche Darstellung quadratischer Formen von Zufallsvariablen findet sich bei Mathai/Provost (1992).

kussion dieser Methoden liefert Read (1998). Genauigkeitsanalysen von Delta-Gamma-Methoden finden sich bei Mina/Ulmer (1999) und Pichler/Selitsch (1999).

### **MC-Methoden mit Varianz-Reduktionstechniken**

Kann aufgrund der Komplexität der G/V-Funktion oder aufgrund des unterstellten mathematisch-statistischen Marktfaktormodells keine parametrische Methode angewandt werden, so besteht immer noch die Möglichkeit, den VaR mit Hilfe von MC-Simulationen zu berechnen. Falls hierbei für jedes MC-Szenario der G/V-Wert durch Neubewertung des gesamten Portfolios ermittelt werden muss, kann die Risikomessung, wie erwähnt, sehr rechen- und zeitintensiv werden.

Zur Minderung des MC-Rechenaufwands stehen grundsätzlich zwei Techniken zur Verfügung. Die eine zielt darauf ab, durch den Einsatz von Varianz-Reduktionstechniken die Konvergenz der Simulationsresultate voranzutreiben, so dass weniger Simulationsdurchläufe und demnach weniger rechenintensive Portfolioneubewertungen notwendig sind. Die andere Möglichkeit besteht darin, die G/V-Funktion in geeigneter Weise zu approximieren, so dass nicht für jedes MC-Szenario zeitintensive *Instrumentenneubewertungen*<sup>14</sup> durchgeführt werden müssen. Auf die zweite Möglichkeit wird im nächsten Unterabschnitt eingegangen. Natürlich können diese beiden Techniken auch miteinander kombiniert werden.<sup>15</sup>

Beispiele für Varianz-Reduktionstechniken sind "Importance Sampling", "Stratified Sampling" oder "Quasi-Random-Numbers". Einen Überblick der verschiedenen Varianz-Reduktionstechniken liefern Boyle/Broadie/Glassermann (1997). Konkrete Anwendungsbeispiele der Varianz-Reduktionstechniken für die VaR-Berechnung finden sich bei Glassermann/Heidelberger/Shahabuddin (1999a), (1999b), (2000), Kreinin et al. (1998a), (1998b), Cardenas et al. (1999) sowie Fuglsbjerg (2000).

---

<sup>14</sup> 6.2.1 Methodenspezifischer Rechenaufwand der Full-MC-Methode, S. 163

<sup>15</sup> Zum Beispiel kombinieren Glassermann/Heidelberger/Shahabuddin (2000a) die Delta-Gamma-Approximation mit der Varianz-Reduktionstechnik "Importance Sampling" und Kreinin et al. (1998) die Grid-Approximations-Technik mit der Quasi-MC-Methode.

## MC-Methoden mit G/V-Approximationen

Die zweite Möglichkeit zur Verringerung des MC-Simulationsaufwands liegt in der geeigneten Approximation der G/V-Funktion des Portfolios. Auf diese Entwicklungsrichtung der VaR-Methodik ist der Fokus dieser Arbeit gerichtet.

Eine oft angewandte G/V-Annäherung im Rahmen der VaR-Berechnung ist die Taylor-Approximation.<sup>16</sup> Mit ihr werden die Werte der G/V-Funktion von einem festen Punkt aus gemäss der Taylor-Reihe entwickelt.<sup>17</sup> Werden bei der Approximation lediglich die Terme erster Ordnung berücksichtigt, so spricht man von einer Delta-Approximation.<sup>18</sup> Bezieht man zusätzlich die Terme zweiter Ordnung mit ein, wird dies als Delta-Gamma-Approximation bezeichnet.<sup>19</sup>

Eine Alternative hierzu stellt die Grid-Approximation dar.<sup>20</sup> Im Gegensatz zur Taylor-Approximation nähert die Grid-Approximation die G/V-Funktion nicht von einem, sondern von mehreren Funktionspunkten aus an.<sup>21</sup>

Eine dieser Grid-Approximationsmethoden wurde von Frye (1998) vorgestellt. Er schlug vor, die G/V-Funktion eines Portfolios mit Hilfe eines *multidimensionalen Grids*<sup>22</sup>, basierend auf den wichtigsten *Hauptkomponenten* (PCA-Faktoren)<sup>23</sup>, anzunähern. Die PCA-Faktoren werden dabei mittels der Hauptkomponentenzerlegung (Principal Component Analysis) aus der Kovarianzmatrix, bzw. Korrelationsmatrix der Marktfaktoren gewonnen. Die Methode von Frye wird in dieser Arbeit als *PCA-Grid-Methode* bezeichnet.

Eine ähnliche Methode beschreiben Gibson/Pritsker (2000). Ihr Grid beruht aber auf den Faktoren, die mit Hilfe der *Partial-Least-Squares-Methode* (PLS-Methode) ermittelt werden. Die PLS-Methode bestimmt im Gegensatz zur PCA-Methode die Faktoren portfolioabhängig. Mit anderen Worten: Es fließen nicht nur die Informationen der Marktfaktordynamik, sondern auch jene der entsprechenden Preisreaktionen des Portfolios in die Auswahl der PLS-Faktoren mit ein. Die Methode von Gibson/Pritsker (2000) wird in dieser Arbeit als *PLS-Grid-Methode* bezeichnet.

---

<sup>16</sup> Vgl. Duffie/Pan (1997); Estrella (1994); RiskMetrics (1996), S. 156-157; Picoult (1998), S. 224-227

<sup>17</sup> Vgl. Taylor-Reihe, S. 22

<sup>18</sup> Vgl. Lineares Portfolio, S. 22

<sup>19</sup> Vgl. Konvexes Portfolio, S. 23

<sup>20</sup> Vgl. Frye (1998); Chishti (1999); Gibson/Pritsker (2000)

<sup>21</sup> Eine ausführliche Beschreibung der Grid-Approximation findet sich auf S. 50 ff.

<sup>22</sup> Approximationsmethode, die auf einem Gitter, bzw. Stützstellen beruht. Vgl. 3.4.1 Grid-Approximation, S. 50

<sup>23</sup> Die PCA-Faktoren entsprechen den Hauptkomponenten, bzw. den normierten Hauptachsen. Vgl. Fahmeir/Hamerle (1984), S. 598.

Insgesamt werden in der vorliegenden Arbeit folgende auf MC-Simulation basierenden Methoden bzgl. Genauigkeit und Rechenaufwand untersucht:

- Full-MC-Methode
- Delta-(MC-)Methode<sup>24</sup>
- Delta-Gamma-(MC-)Methode
- PCA-Grid-(MC-)Methode
- PLS-Grid-(MC-)Methode

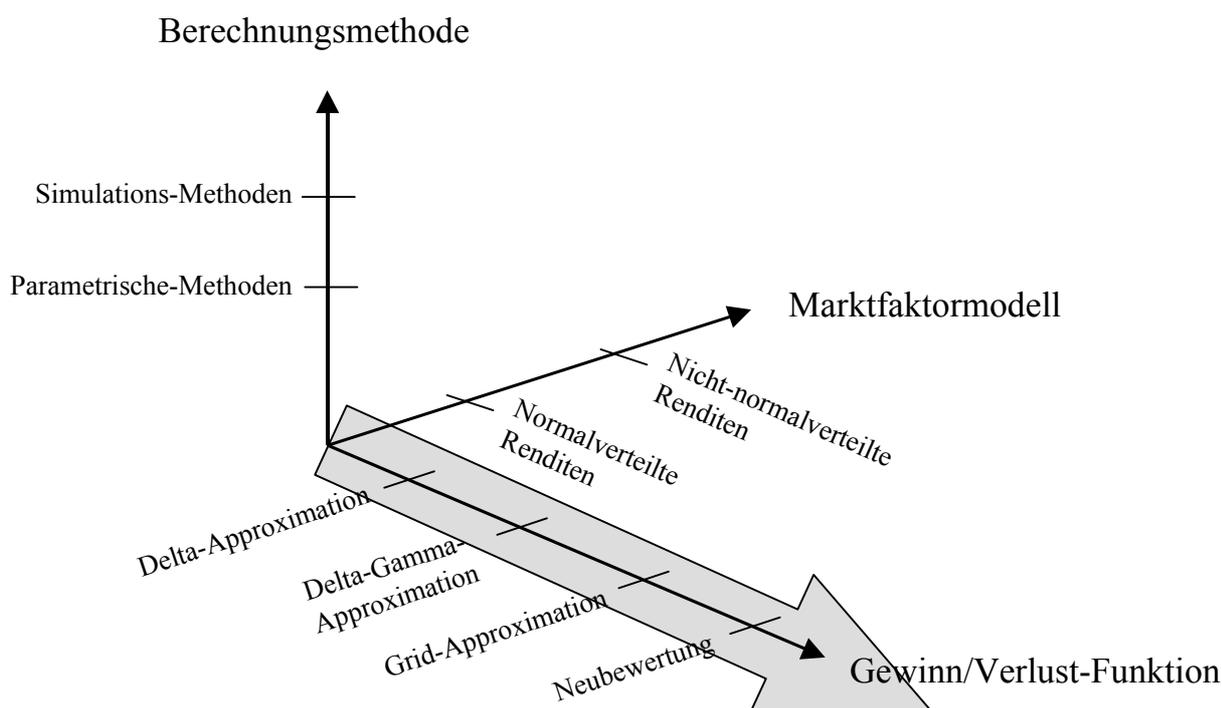
---

<sup>24</sup> Da alle untersuchten Methoden auf Monte-Carlo-Simulationen basieren, wird im Folgenden ausser bei der Full-MC-Methode auf den Zusatz "MC" verzichtet.

## 1.2 Schwerpunkt und Abgrenzung der Arbeit

Um einerseits den Schwerpunkt dieser Arbeit zu verdeutlichen und andererseits eine klare Abgrenzung gegenüber ähnlichen Genauigkeitsanalysen zu ermöglichen, werden die wichtigsten Untersuchungsobjekte im Zusammenhang mit der VaR-Methodik in drei so genannte "*VaR-Dimensionen*" eingeteilt (vgl. Abbildung 1-2).

Abbildung 1-2: VaR-Dimensionen



### VaR-Dimension: "Marktfaktormodell"

Dem Untersuchungsobjekt "Marktfaktormodell" wird vor allem in akademischen Kreisen grosse Beachtung geschenkt. In dieser Dimension geht es um die Art und Weise, wie die Marktfaktoren modelliert und parametrisiert werden. Während bei der VaR-Berechnung mittels *Historischer Simulation* überhaupt keine Verteilungsannahmen bezüglich der Marktfaktoren getroffen werden,<sup>25</sup> unterstellt das VaR-Standardmodell von RiskMetrics normalverteilte Marktfaktoränderungen.<sup>26</sup> Daneben existieren diverse aufwändigere Mo-

<sup>25</sup> Für eine einfache Darstellung der Historischen Simulation siehe Jorion (1996), S. 193 ff. Empirische Untersuchungen zur Historischen Simulation finden sich bei z.B. bei Beder (1995) und Hendricks (1996).

<sup>26</sup> Wobei die Kovarianzmatrix der Marktfaktoren mit Hilfe des Exponentially-Weighted-Moving-Average-Modell auf den Berechnungszeitpunkt konditioniert wird. Vgl. RiskMetrics (1996), S. 75-100

delle, mit denen auch die empirisch beobachteten Marktfaktoreigenschaften wie *Fat-Tails*<sup>27</sup> oder *stochastische Volatilitäten* abgebildet werden können.<sup>28</sup>

Ebenfalls diesem Themenkreis zuzuordnen sind die verschiedenen Schätzmethoden, mit denen die Volatilitäten<sup>29</sup> und Kovarianzen<sup>30</sup>/Korrelationen<sup>31</sup> der Marktfaktoren quantifiziert werden können.

### **VaR-Dimension: "Berechnungsmethode"**

In der Dimension "Berechnungsmethode" werden die VaR-Konzepte nach der Art und Weise der kalkulatorischen Bestimmung des VaR unterschieden. So kann VaR z.B. direkt anhand einer analytisch-geschlossenen Formel (RiskMetrics-Methode) oder aber alternativ mit Hilfe einer durch Simulation geschaffenen G/V-Verteilung bestimmt werden.

### **VaR-Dimension "G/V-Funktion"**

Der Fokus dieser Arbeit richtet sich ausschliesslich auf die Dimension "G/V-Funktion". Entlang dieser Achse ändert sich einzig die Art und Weise, wie die G/V-Funktion des Portfolios bei der VaR-Messung abgebildet wird. Das untersuchte Spektrum reicht von linearer G/V-Approximation (Delta-Methode) über Grid-Approximationen bis hin zur exakten Anwendung der originären G/V-Funktion (Full-MC-Methode).

---

<sup>27</sup> Extremwerte treten mit einer Häufigkeit auf, die nicht durch die Normalverteilung erklärt werden kann.

<sup>28</sup> Für Modelle mit nicht-normalverteilten Renditen vgl. Hull/White (1998); Quinlan (1998); Shaw (1998), Duffie/Pan (1997); Wilson (1993); Böhmer/Sperlich (1997)

<sup>29</sup> Vgl. Boudoukh/Richardson/Whitelaw (1997); Figlewski (1994); Day/Lewis (1992); Jorion (1995)

<sup>30</sup> Vgl. Alexander/Leigh (1997); Jackson/Maude/Perraudin (1997); Fallon (1996)

<sup>31</sup> Campa/Chang (1995); Jorion (1996), S. 176-178, Blythe (1996); Shaw (1998)

### 1.3 Zielsetzung der Arbeit

In der einschlägigen Fachliteratur findet man zahlreiche Untersuchungen, die sich mit der Genauigkeit von VaR-Methoden auseinandersetzen. Die meisten Untersuchungen konzentrieren sich jedoch hauptsächlich auf die Frage, wie die Marktfaktoren in geeigneter Weise mathematisch-statistisch abgebildet werden können.<sup>32</sup> Die vorliegende Arbeit liefert zu diesem Thema keine neuen Erkenntnisse. Die in diesem Rahmen vorgenommenen Genauigkeitsanalysen konzentrieren sich nur auf die Frage, wie exakt die ausgewählten MC-Methoden den VaR mit Hilfe unterschiedlicher G/V-Approximationen bei gegebener Verteilung der Marktfaktoren quantifizieren können.<sup>33</sup>

Da die Genauigkeiten der Methoden primär von den im Portfolio enthaltenen Instrumenten abhängen, werden die Genauigkeitstests der Methoden anhand unterschiedlich komplizierter Portfolios durchgeführt. Die Testportfolios werden so definiert, dass sie *archetypische G/V-Charakteristiken* aufweisen.

Die vorliegende Arbeit kann als Fortsetzung der Untersuchung von Pritsker (1996) verstanden werden, indem Genauigkeiten und Rechenaufwände neuartiger VaR-Methoden analysiert und dokumentiert werden.

---

<sup>32</sup> Vgl. Duffie/Pan (1997); Alexander/Leigh (1997); Boudoukh/Richardson/Whitelaw (1997); Jackson/Maude/Perraudin (1997)

<sup>33</sup> Bei den Genauigkeitstests wird angenommen, dass die konditionierten Marktfaktoränderungen normalverteilt sind. Vgl. 4.3.3 Verteilung de, S. 110

## 1.4 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist in zwei Teile gegliedert. Im ersten Teil werden die Grundlagen der VaR-Methodik erörtert und die MC-Methoden vorgestellt, deren Genauigkeiten und Berechnungsaufwände dann im zweiten Teil eingehend untersucht werden. Der erste Teil umfasst die Kapitel 2 und 3, der zweite die Kapitel 4 bis 7.

*Kapitel 2* befasst sich mit den Bausteinen der Marktrisikomessung. Dazu gehören die Identifikation und die Modellierung der risikorelevanten Marktfaktoren, die Ermittlung der Abhängigkeit des Portfoliopreises von Marktfaktoränderungen sowie die Wahl des geeigneten Marktrisikomasses. Es werden finanzmarkttheoretische Konzepte vorgestellt, mit denen die Preisveränderungen an den Märkten mathematisch-statistisch abgebildet werden können. Auch auf Probleme im Zusammenhang mit der Marktfaktormodellierung und auf entsprechende empirische Befunde wird hingewiesen. Zusätzlich wird in diesem Kapitel bereits eine grobe Typisierung von G/V-Funktionen vorgenommen, auf die zwar im ersten Teil verschiedentlich hingewiesen wird, die aber erst im zweiten Teil eine wichtige Rolle spielt, wenn es darum geht, die Genauigkeiten der MC-Methoden anhand unterschiedlich komplizierter Portfolios zu testen. Am Ende des Kapitels kommen neben dem Standardrisikomass VaR auch Shortfall-Masse zur Diskussion, einerseits, da mit allen vorgestellten MC-Methoden auch Shortfall-Masse berechnet werden können, und andererseits, um Vorteile, Nachteile und Gemeinsamkeiten von Marktrisikomassen aufzuzeigen.

*Kapitel 3* beschreibt MC-Methoden, die durch geeignete G/V-Approximationen in der Lage sind, den Rechenaufwand zu vermindern. Zunächst wird die Full-MC-Methode beschrieben, deren VaR-Resultate bei der Genauigkeitsanalyse als Referenzwerte dienen. Die Delta- und die Delta-Gamma-Methoden gehören zu den MC-Methoden, die die G/V-Funktion von Portfolios mit Hilfe von Taylor-Approximationen schätzen. Die PCA-Grid- und die PLS-Grid-Methode hingegen repräsentieren MC-Methoden, die die G/V-Funktion mit Hilfe eines multidimensionalen Grids approximieren. Neben der Darstellung der modellspezifischen Konzepte werden die Methoden anhand einfacher Zahlenbeispiele illustriert und miteinander verglichen.

*Kapitel 4* erläutert die speziell in *Mathematica*<sup>34</sup> programmierte Testumgebung, mit der die Genauigkeiten der MC-Methoden gemessen werden. Zur Messung dienen ausschliesslich

---

<sup>34</sup> Mathematica von Wolfram Research ist ein auf C-basierendes Softwareprogramm, das speziell für mathematische Anwendungen entwickelt wurde.

Testportfolios mit Zinsinstrumenten. Für den Test wurden folgende Portfoliogruppen festgelegt: Long-Bond-Portfolio, Long/Short-Bond-Portfolio, Hedged-Long/Short-Bond-Portfolio, Short-Caplet/Floorlet-Portfolio und Digital-Option-Portfolio. Den eingesetzten Instrumenten kommt keine besondere Bedeutung zu - sie werden lediglich eingesetzt, um die gewünschten G/V-Charakteristiken von Portfolios zu erzeugen. Marktdatenbasis für die VaR-Berechnungen bilden historische Zinsdaten fünf verschiedener Währungen. Als Referenzwerte der Genauigkeitsuntersuchung dienen die Resultate der Full-MC-Methode. Die Fehlermessung erfolgt mit einer Reihe unterschiedlicher Fehlerkennzahlen, um eine möglichst transparente und differenzierte Fehleranalyse zu gewährleisten.

*Kapitel 5* berichtet über die Resultate der Genauigkeitsanalyse. Den Resultaten vorangestellt sind jeweils die Detailspezifikationen der Testportfolios. Um die Genauigkeiten zu messen, werden der *eintägige VaR(95%)*, der *eintägige VaR(99%)*, der *zweiwöchige VaR(95%)* sowie der *zweiwöchige VaR(99%)* mit Hilfe der verschiedenen MC-Methoden quantifiziert und mit den Resultaten der Full-MC-Methode verglichen. Die Genauigkeitsanalysen finden jeweils auf Ebene der Portfoliogruppen statt.

*Kapitel 6* misst den mit der VaR-Schätzung verbundenen Rechenaufwand der verschiedenen MC-Methoden. Dabei konzentriert sich die Analyse im Besonderen auf die methodenspezifischen Rechenaufwände. Hauptaufwands-treiber sind die Instrumentenberechnungen, deren Anzahl einen verlässlichen Indikator für die methodenspezifischen Rechenaufwände liefert. Ebenfalls werden die zur VaR-Berechnung eines Referenzportfolios benötigten CPU-Zeiten<sup>35</sup> der jeweiligen MC-Methoden ausgewiesen.

*Kapitel 7* beschliesst die Arbeit mit der Zusammenfassung der Resultate der vorangegangenen Kapitel. Im Zentrum des Interesses steht die Beantwortung der Frage: "Welche MC-Methode eignet sich für welche Art von Portfolio?". Dazu werden die Genauigkeiten und Rechenaufwände der MC-Methoden auf Ebene der untersuchten Portfoliogruppen miteinander in Beziehung gebracht und kommentiert.

---

<sup>35</sup> Die methodenspezifischen Rechenprozesse werden in Form beanspruchter CPU-Zeiten (Central Processing Unit) gemessen.

## ERSTER TEIL

Der erste Teil besteht aus Kapitel 2 und 3. Kapitel 2 stellt zunächst die theoretischen und konzeptionellen Grundlagen der Marktrisikomessung und im Besonderen des VaR vor. In Kapitel 3 werden die für die vorliegende Untersuchung ausgewählten MC-Methoden detailliert dargestellt und mit einfachen Anwendungsbeispielen illustriert.

### 2 Grundlagen der Marktrisikomessung

Als Marktwerttrisiken oder kurz Marktrisiken werden mögliche Marktwertverluste von Finanzinstrumenten<sup>1</sup> oder Portfolios von Finanzinstrumenten aufgrund von Preis-, bzw. Kursschwankungen an den Finanzmärkten bezeichnet. Betroffen von den Marktrisiken sind z.B. Finanzbereiche von Unternehmen, insbesondere Banken und Versicherungen, aber auch andere institutionelle sowie private Anleger. Alternative Risikoformen, wie z.B. *Kreditrisiken*, *Liquiditätsrisiken* oder *operationelle Risiken*, werden in dieser Arbeit nicht behandelt.

*Die Marktrisikomessung basiert grundsätzlich auf vier Bausteinen, die in der*

Tabelle 2-1 aufgelistet sind. Das vorliegende Kapitel geht auf die einzelnen Bausteine ein, weist auf allfällige Probleme hin und bildet das Fundament für das nachfolgende Kapitel, das die ausgewählten VaR-Methoden beschreiben wird.

*Tabelle 2-1: Bausteine der Marktrisikomessung*

<b>1. Identifikation der Marktfaktoren</b> Welche Faktoren haben Einfluss auf den Wert des zu Grunde liegenden Finanzportfolios?
<b>2. Modellierung der Marktfaktoren</b> Wie lassen sich die Marktfaktoren mathematisch-statistisch abbilden?
<b>3. G/V-Funktion des Portfolios</b> Wie reagiert der Marktwert des Portfolios auf Änderungen der Marktfaktoren?
<b>4. Marktrisikomasse</b> Wie soll das Risiko des Portfolios gemessen werden?

Zunächst befasst sich Abschnitt 2.1 mit der Identifikation der für das Portfolio relevanten Marktfaktoren. In Abschnitt 2.2 wird aufgezeigt, wie die Marktfaktoren mathematisch-statistisch abgebildet werden können. Abschnitt 2.3 konzentriert sich auf die G/V-Funktion

<sup>1</sup> Finanzinstrumente, auch Finanzanlagen, -produkte o.ä. genannt, sind z.B. Aktien, Bonds, Swaps, Futures, Optionen

von Portfolios und stellt eine grobe Typisierung auf. In Abschnitt 2.4 werden die Marktrisikomasse VaR und Shortfall-Masse definiert und ihre Vor- und Nachteile sowie Einsatzmöglichkeiten beschrieben.

## 2.1 Identifikation der Marktfaktoren

Um das Marktrisiko eines Portfolios zu quantifizieren, müssen zunächst die preisrelevanten Marktfaktoren identifiziert werden. Preisrelevante Marktfaktoren können, wie einleitend bereits erläutert, z.B. Zinssätze, Aktienpreise, Wechselkurse oder Rohstoffpreise sein, je nachdem, welche Finanzinstrumente im Portfolio enthalten sind.<sup>2</sup>

Konkret lässt sich dies am Beispiel eines einfachen Bonds (Straight Bond) darstellen. Der Käufer eines Bonds erhält vom Schuldner (Verkäufer) einen über eine bestimmte Zeit verteilten Zahlungsstrom, bestehend aus periodischen Couponzahlungen und einer Kapitalrückzahlung am Ende der Laufzeit, sofern der Schuldner in der Zwischenzeit nicht zahlungsunfähig wird.<sup>3</sup> Um den heutigen Marktwert dieser zukünftigen Cashflows zu ermitteln, wird gemäss dem Barwertprinzip<sup>4</sup> jede einzelne Zahlung auf den heutigen Zeitpunkt abdiskontiert und zwar zu den aktuell gültigen, laufzeitkongruenten Zinssätzen. Die Zinssätze bilden hier also die preisrelevanten Marktfaktoren. Steigt ein Zinssatz, so vermindert sich, ceteris paribus, der Marktwert des Bonds.

Bei umfangreichen Portfolios kann die Anzahl der Marktfaktoren derart gross sein, dass sie die Risikomessung erschwert oder sogar verunmöglicht wird.<sup>5</sup> Deshalb gilt es, unter geschickter Ausnutzung finanzmarkttheoretischer Modelle und statistischer Verfahren die Zahl der zu berücksichtigenden Faktoren gezielt zu verringern.

---

<sup>2</sup> Aber auch Marktfaktorvolatilitäten oder Kreditspreads können Marktfaktoren im weiteren Sinne sein.

<sup>3</sup> Zur Vereinfachung werden in dieser Arbeit die Einflüsse von Kreditrisiken vernachlässigt. Themen wie Kreditspreads oder Ausfallrisiken bleiben daher unberücksichtigt.

<sup>4</sup> Vgl. Ross/Westerfield/Jaffe (1999), Kapitel 4

<sup>5</sup> Je mehr Marktfaktoren eingesetzt werden, desto schwieriger gestaltet sich z.B. die Schätzung der entsprechenden Kovarianzmatrix. Wenn die Zahl der Marktfaktoren diejenigen der Beobachtungspunkte übersteigt, so ist nicht länger gewährleistet, dass die daraus resultierende Kovarianzmatrix positiv-definit ist. Vgl. Jorion (1996), S. 156-157

## 2.2 Modellierung der Marktfaktoren

Nach der Identifizierung der für das Portfolio preisrelevanten Marktfaktoren müssen diese mathematisch-statistisch abgebildet werden, damit das Risiko quantifiziert werden kann. Bachelier (1900) war der Wegbereiter, indem er mit dem so genannten *Standard-Wiener-Prozess* erstmals den Kursverlauf von Aktien modellierte. Seitdem sind eine Vielzahl weiterer *stochastischer Prozesse* zur Abbildung der Marktfaktordynamik vorgeschlagen worden, wie z.B. der *Geometrische-Wiener-Prozess*,<sup>6</sup> die *GARCH*,<sup>7</sup> die *Jump-Diffusion*-<sup>8</sup> oder die *Markov-Switching-Modelle*<sup>9</sup>.

Ziel der Marktfaktormodellierung ist es, die realen Marktfaktorbewegungen mit ihren charakteristischen Eigenschaften so genau wie möglich nachzubilden, wobei zwischen Wesentlichem und Unwesentlichem unterschieden werden muss, damit das Modell übersichtlich und praktisch anwendbar bleibt.

### 2.2.1 Zufälliger Marktvektor

Mit einem stochastischen Prozess lässt sich in der Folge die Entwicklung der Marktfaktoren während eines gewünschten Betrachtungszeitraums<sup>10</sup>  $[0, T]$  modellieren. Zwar kennt man die Werte der Marktfaktoren zum Anfangszeitpunkt, aber man weiss nicht, welche Werte sie am Ende des Betrachtungshorizonts  $T$  aufweisen. Deshalb ist der  $(M \times 1)$ -Vektor  $\mathbf{X}$ , der die  $M$  preisrelevanten Marktfaktoren des Portfolios zum Betrachtungsende  $T$  enthält,<sup>11</sup>

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_M \end{pmatrix}, \quad (2-1)$$

formal betrachtet ein Zufallsvektor. Seine Verteilung hängt vom stochastischen Prozess ab, der den Marktfaktoren für den Zeitraum  $[0, T]$  unterstellt wird.

Eine zufällige Ausprägung von  $\mathbf{X}$  beschreibt genau einen möglichen zukünftigen Marktzustand

<sup>6</sup> Auf diesem Prozess baut z.B. das Black/Scholes-Optionspreismodell auf. Vgl. Black/Scholes (1973)

<sup>7</sup> GARCH steht für Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. Für eine Übersicht siehe Bollerslev/Chou/Kroner (1992).

<sup>8</sup> Erstmals von Merton (1976) vorgeschlagen.

<sup>9</sup> Vgl. Hamilton (1990)

<sup>10</sup> Im Zusammenhang mit der VaR-Berechnung wird dieser Zeitraum auch als Haltedauer oder Halteperiode bezeichnet. Vgl. Haltedauer, S. 28

<sup>11</sup> Vektoren werden in dieser Arbeit fett geschrieben.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{pmatrix}, \quad (2-2)$$

indem z.B.  $x_1$  den Wert des einmonatigen CHF-Zinssatzes,  $x_2$  den CHF/EUR-Wechselkurs,  $x_3$  den Indexstand des Swiss-Market-Index usw. für den Zeitpunkt  $T$  beschreiben. Mit dem Vektor  $\mathbf{X}$  werden die Finanzmärkte und deren Dynamik im Modell abgebildet.  $\mathbf{X}$  wird deshalb kurz und prägnant als Marktvektor bezeichnet.

### 2.2.2 Zufälliger Risikovektor

Der  $(M \times 1)$ -Vektor  $\mathbf{S}$  sei definiert als

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_M \end{pmatrix} = \mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}, \quad (2-3)$$

wobei

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \bar{X}_1 \\ \vdots \\ \bar{X}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ \vdots \\ E(X_M) \end{pmatrix}. \quad (2-4)$$

$S_i$  bezeichnet somit die Abweichung des  $i$ -ten Marktfaktors  $X_i$  von seinem Erwartungswert  $\bar{X}_i$  und kann als zufällige, unerwartete Komponente des Marktfaktors interpretiert werden.  $S_i$  wird daher als ( $i$ -te) Risikokomponente<sup>12</sup> und  $\mathbf{S}$  als Risikovektor bezeichnet.

### 2.2.3 Erwartungswert des Risikovektors

Aufgrund der Konstruktion entspricht die Verteilung des Risikovektors  $\mathbf{S}$  genau der um Null gemittelten Verteilung des Marktvektors  $\mathbf{X}$ .

Für den Erwartungswert des Risikovektors gilt

$$E(\mathbf{S}) = E(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) = E(\mathbf{X}) - \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{0}. \quad (2-5)$$

---

<sup>12</sup> Bei Duffie/Pan (1997), S. 29, wird  $S_i$  als die  $i$ -te "surprise component" und bei Studer (1997), S. 3, als der  $i$ -te Risikofaktor bezeichnet.

### 2.2.4 Kovarianzmatrix des Risikovektors

Von zentraler Bedeutung für die Markttrisikomessung ist die Kovarianzmatrix  $\underline{\underline{\Sigma}}$  des Risikovektors  $\mathbf{S}$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{\Sigma}} &= \text{Cov}(\mathbf{S}) = \text{Cov}(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) \\
 &= \text{Cov}(\mathbf{X}) \\
 &= \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \cdots & \sigma_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{M,1} & \cdots & \sigma_{M,M} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \rho_{1,1} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_1 & \cdots & \rho_{1,M} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_M \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{M,1} \cdot \sigma_M \cdot \sigma_1 & \cdots & \rho_{M,M} \cdot \sigma_M \cdot \sigma_M \end{pmatrix}. \tag{2-6}
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $\sigma_i$  die Standardabweichung von  $S_i$ ,  $\rho_{i,j}$  die Korrelation und  $\sigma_{i,j}$  die Kovarianz von  $S_i$  und  $S_j$ ,  $i, j = 1, \dots, M$ .<sup>13</sup>

Da die Kovarianzmatrix bei der VaR-Messung überaus wichtig ist, gebührt ihrer Schätzung besondere Aufmerksamkeit. Die Fachliteratur ist reich an Methoden, mit der die Kovarianzmatrix prognostiziert werden kann.<sup>14</sup> Zu den Bekanntesten gehören:

- das *Equally-Weighted-Moving-Average-Modell*<sup>15</sup>
- das *Exponentially-Weighted-Moving-Average-Modell*<sup>16</sup>
- die *(G)ARCH-Modelle*<sup>17</sup>

### 2.2.5 Verteilung des Risikovektors

Betrachtet man bei der Markttrisikomessung lediglich einen kurzen Zeitraum,<sup>18</sup> so wird in der Regel unterstellt, dass der Risikovektor multivariat-normalverteilt ist<sup>19</sup>

<sup>13</sup> Matrizen werden in dieser Arbeit doppelt unterstrichen.

<sup>14</sup> Vgl. Alexander/Leigh (1997); Jackson/Maude/Perraudin (1997); Fallon (1996); Campa/Chang (1995); Jorion (1996), S. 176-178; Blythe (1996); Shaw (1998)

<sup>15</sup> Gleichmässige Gewichtung der beobachteten Renditen. Auch als einfache Kovarianzschätzung bezeichnet. Vgl. Alexander (1996), S. 235; Boudokh/Richardson/Whitelaw (1997), S. 64, RiskMetrics (1996), S. 75-100; Bosch (1998), S. 484

<sup>16</sup> Exponentielle Gewichtung der beobachteten Renditen. Entspricht der in RiskMetrics angewandten Methode zur Schätzung der Kovarianzmatrix. Vgl. RiskMetrics (1996), S. 75-100; Boudokh/Richardson/Whitelaw (1997), S. 64f.

<sup>17</sup> Kovarianzschätzung basierend auf (G)ARCH-Modellen. Vgl. Engle (1982), S. 987-1008; Bollerslev (1986), S. 307-328; Boudokh/Richardson/Whitelaw (1997), S. 64-66; RiskMetrics (1996), S. 88-90

<sup>18</sup> Übliche Halteperioden bei der VaR-Messung sind ein und zehn Handelstage. Vgl. Haltedauer, S. 28

<sup>19</sup> Vgl. RiskMetrics (1996); Fallon (1996), S. 6-11; Pritsker (1996), S. 7; Wilson (1996), S. 219

$$\mathbf{S} \sim N_M(\mathbf{0}, \underline{\underline{\Sigma}}). \quad (2-7)$$

Mit dieser Verteilung lässt sich das Risiko zwar einfach berechnen, doch empirische Untersuchungen deuten darauf hin, dass die resultierende Verteilungsannahme nur approximativ richtig ist.<sup>20</sup> Die Verteilungen weisen nämlich Fat-Tails und *Thin-Waists*<sup>21</sup> auf. Ebenfalls werden *schiefe Verteilungen*<sup>22</sup> beobachtet.<sup>23</sup> Einen interessanten Überblick rund um die Problematik der Marktfaktormodellierung findet man z.B. bei Duffie/Pan (1997).<sup>24</sup>

---

<sup>20</sup> Vgl. Taylor (1986), S. 44, Hull/White (1998), S. 9; Danielsson/Hartmann/deVries (1998), S. 5; Duffie/Pan (1997), S. 11; Jackson/Maude/Perraudin (1997), S. 78; RiskMetrics (1996), S. 64; Lekkos (1999), S. 35 sowie die Klassiker Mandelbrot (1963), S. 394 und Fama (1965), S. 34

<sup>21</sup> Änderungen nahe dem Mittelwert treten mit einer durch die Normalverteilung nicht erkläraren Häufigkeit auf.

<sup>22</sup> Die Schiefe ist ein Mass der Asymmetrie einer Verteilung um ihren Mittelwert. Bei der Normalverteilung beträgt ihr Wert Null. Für die Definition der Schiefe siehe Bosch (1998), S. 210.

<sup>23</sup> Vgl. Duffie/Pan (1997), S. 43

<sup>24</sup> Die Autoren gehen auf Probleme wie Fat-Tails, stochastische Volatilitäten, extreme Kursausschläge, Mean Reversion und Saisonalitätseffekte ein.

### 2.3 G/V-Funktion des Portfolios

Nachdem in den vorhergehenden Abschnitten der Fokus auf die modellmässige Abbildung der Finanzmärkte gerichtet wurde, interessiert im vorliegenden Abschnitt, wie sich die Preis- und Kursveränderungen der Märkte auf den Wert von Finanzportfolios auswirken.

Setzt man voraus, dass eine Bewertungsfunktion  $P(\mathbf{X})$  existiert, mit der der Wert eines Portfolios in Abhängigkeit des Marktvektors  $\mathbf{X}$  zum Zeitpunkt  $T$  bestimmt werden kann, so gilt für den geplanten Portfoliowert<sup>25</sup>

$$P^{Plan} = P(\bar{\mathbf{X}}). \quad (2-8)$$

Definiert man das Risiko als die Wahrscheinlichkeit einer negativen Abweichung vom geplanten Portfoliowert,<sup>26</sup> so entsteht ein Gewinn, falls  $P - P^{Plan} > 0$  und ein Verlust, falls  $P - P^{Plan} < 0$ .<sup>27</sup> Somit führen Abweichungen der Marktfaktoren von ihren Erwartungswerten zu Gewinnen bzw. Verlusten.

Unter Berücksichtigung des Risikovektors  $\mathbf{S} = \mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}$  gilt somit für die G/V-Funktion des Portfolios

$$\Delta P = \Delta P(\mathbf{S}) = P(\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S}) - P(\bar{\mathbf{X}}). \quad (2-9)$$

Um einen groben Eindruck zu erhalten, wie das Portfolio auf Marktfaktoränderungen reagiert, können Sensitivitätsgrössen, wie z.B. der *Delta-Vektor* und die *Gamma-Matrix*, ermittelt werden.

<sup>25</sup> Der geplante Portfoliowert entspricht nur unter bestimmten Voraussetzungen dem Erwartungswert des Portfolios.

<sup>26</sup> In Anlehnung an Moser/Quast (1994), S. 665. Der Risikobegriff ist aber vielschichtig und in der wirtschaftswissenschaftlichen Literatur findet man eine Reihe weiterer Klassifikationen. Für eine ausführliche Diskussion sei auf Braun (1984) verwiesen.

<sup>27</sup> In der Literatur wird in einigen Fällen auch die absolute Wertänderung des Portfolios über die Halteperiode als Gewinn, bzw. Verlust bezeichnet. Vgl. Pritsker (1996), S. 5; Alexander/Leigh (1997), S. 50; Jorion (1996), S. 91; Albrecht (2000), S. 4

### Delta-Vektor

Der  $(M \times 1)$ -Vektor  $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_M)^\top$  bezeichnet den (Portfolio-) Delta-Vektor. Sein  $i$ -tes Element  $\delta_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  entspricht der ersten partiellen Ableitung der Bewertungsfunktion  $P(\mathbf{X})$  nach dem  $i$ -ten Marktfaktor  $X_i$ , berechnet an der Stelle  $\bar{\mathbf{X}}$

$$\delta_i = \left. \frac{\partial P(\mathbf{X})}{\partial X_i} \right|_{\bar{\mathbf{X}}} \quad i = 1, \dots, M. \quad (2-10)$$

Der Delta-Vektor misst den linearen Zusammenhang zwischen dem Portfoliowert und den Marktfaktoren.

### Gamma-Matrix

Die symmetrische  $(M \times M)$ -Matrix  $\underline{\underline{\Gamma}}$ , bekannt als (Portfolio-) Gamma-Matrix oder Hesse-Matrix,

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} & \cdots & \gamma_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{M,1} & \cdots & \gamma_{M,M} \end{pmatrix} \quad (2-11)$$

enthält die Elemente  $\gamma_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, M$ . Sie bezeichnen die zweiten partiellen Ableitungen der Preisfunktion  $P(\mathbf{X})$  nach den entsprechenden Marktfaktoren

$$\gamma_{i,j} = \left. \frac{\partial^2 P(\mathbf{X})}{\partial X_i \cdot \partial X_j} \right|_{\bar{\mathbf{X}}}. \quad (2-12)$$

Mit der Gamma-Matrix lassen sich die konvexen Zusammenhänge zwischen dem Portfoliopreis und den Marktfaktoren erklären.

### Taylor-Reihe

Gemäss dem Satz von Taylor<sup>28</sup> kann nun die Bewertungsfunktion des Portfolios auch in Form einer Potenzreihe dargestellt werden. Ausgehend vom festen Funktionswert  $P(\bar{\mathbf{X}})$  gilt

$$P(\mathbf{X}) = P(\bar{\mathbf{X}}) + \boldsymbol{\delta}^T \cdot (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) + \frac{1}{2} (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\Gamma}}} \cdot (\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}) + R_3, \quad (2-13)$$

wobei  $R_3$  das Restglied<sup>29</sup> bezeichnet. Formt man die Gleichung (2-13) unter Berücksichtigung der Definition des Risikovektors  $\mathbf{S} = \mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}$  um, so resultiert die G/V-Funktion

$$\Delta P = \boldsymbol{\delta}^T \cdot \mathbf{S} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\Gamma}}} \cdot \mathbf{S} + R_3. \quad (2-14)$$

#### 2.3.1 Portfoliotypen

Die Genauigkeitsanalyse des zweiten Teils erfordert eine grobe Charakterisierung der Portfolios, damit die Genauigkeiten der VaR-Methoden in Abhängigkeit unterschiedlich komplizierter Portfolios untersucht werden können. Es werden folgende Portfoliotypen definiert:

- Lineares Portfolio
- Konvexes Portfolio
- Komplexes Portfolio

#### Lineares Portfolio

Ein Portfolio wird als lineares Portfolio bezeichnet, wenn seine G/V-Funktion mit Hilfe der Terme erster Ordnung der Taylor-Reihe

$$\Delta P^{Del} = \boldsymbol{\delta}^T \cdot \mathbf{S} \quad (2-15)$$

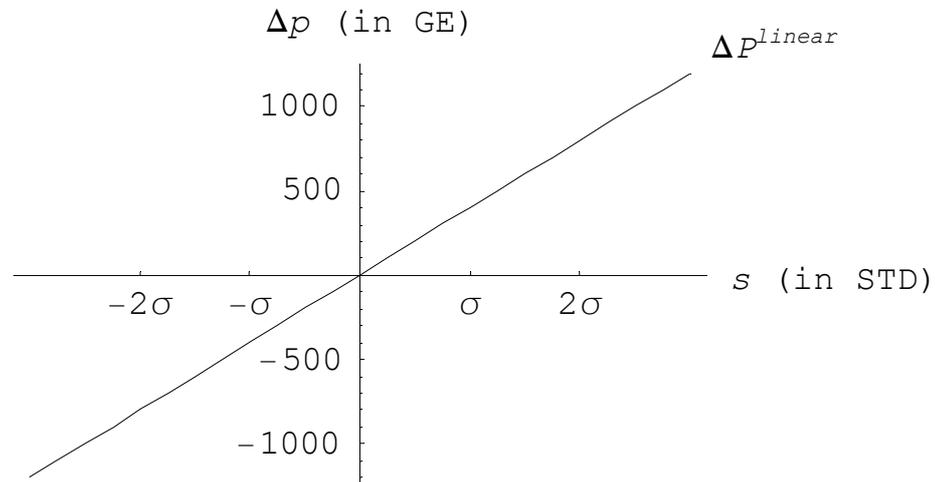
genügend genau abgebildet werden kann.

<sup>28</sup> Vgl. Bronstein et al. (1999), S. 411

<sup>29</sup> Das Restglied enthält Terme dritter und höherer Ordnung.

Die *Delta-(approximierte-)G/V-Funktion*  $\Delta P^{Del}$  eignet sich bei Portfolios mit Aktien, Forwards, Futures, Bonds, Swaps u.a. Diese Instrumente weisen, zumindest über einen kurzen Zeitraum betrachtet, annähernd lineare Verhältnisse gegenüber den Marktfaktoren auf.<sup>30</sup>

Abbildung 2-1: G/V-Funktion eines linearen Portfolios (eindimensionaler Fall)



### Konvexes Portfolio

Ein Portfolio, dessen G/V-Funktion durch die Terme erster und zweiter Ordnung der Taylor-Reihe genügend genau beschrieben werden kann, wird als konvexes Portfolio bezeichnet. Die *Delta-Gamma-(approximierte-)G/V-Funktion* lautet

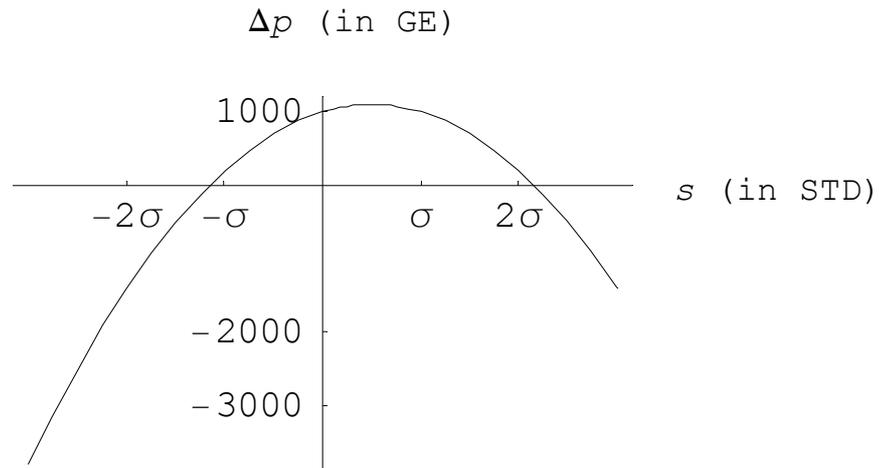
$$\Delta P^{DG} = \delta^T \cdot \mathbf{S} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \underline{\underline{\Gamma}} \cdot \mathbf{S}. \quad (2-16)$$

Konvexe Portfolios enthalten meist Long- oder Short-Positionen in optionsähnlichen Instrumenten.<sup>31</sup>

<sup>30</sup> Für das Risk-Mapping von Instrumenten auf die Marktfaktoren sei auf RiskMetrics (1996), S. 105-148, verwiesen.

<sup>31</sup> Zwar sind auch Bondportfolios konvex. Diese Eigenschaften tritt aber erst bei grossen Marktfaktoränderungen, bzw. bei langem Betrachtungszeitraum deutlich hervor.

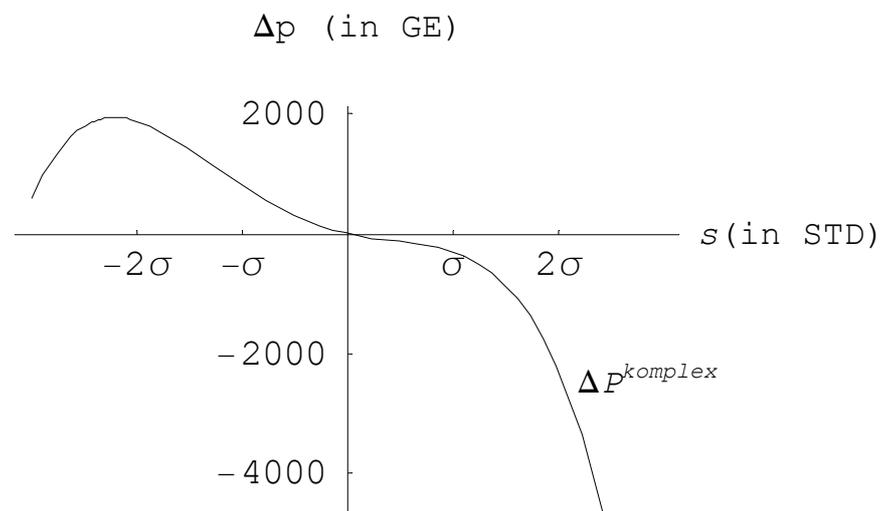
Abbildung 2-2: G/V-Funktion eines konvexen Portfolios (eindimensionaler Fall)



### Komplexes Portfolio

Der dritte Portfoliotyp umfasst all jene Portfolios, deren G/V-Funktion selbst unter Berücksichtigung der ersten beiden Taylor-Terme nur ungenügend angenähert werden können. Dazu gehören Portfolios, die bewusst gegen Delta- und Gamma-Risiken abgesichert sind oder für die keine sinnvollen Delta- oder Gamma-Werte bestimmt werden können.<sup>32</sup>

Abbildung 2-3: G/V-Funktion eines komplexen Portfolios (eindimensionaler Fall)



<sup>32</sup> Z.B. kann das Gamma von Barrier-Options nahe Verfall extrem ansteigen. Vgl. Engeler (1998), S.221-223; Robinson (1996), S. 117

## 2.4 Marktrisikomasse

Nachdem die Marktfaktoren identifiziert und modelliert sind, die G/V-Funktion des Portfolios bestimmt, muss als Letztes das adäquate Risikomass ausgewählt werden. In der Finanzmarkttheorie existieren eine Reihe verschiedener Masse, mit denen Marktrisiken quantifiziert werden können. Bei der Wahl der geeigneten Risikokennzahl ist letztlich der *Evaluationszweck* massgebend. Evaluationszwecke können z.B. sein:

- Pricing von Risiken<sup>33</sup>
- Hedging von Risiken
- Quantifizierung der Eigenkapitalerfordernisse für Marktrisiken<sup>34</sup>
- Limitensetzung<sup>35</sup>
- Messung der risikoadjustierten Performance<sup>36</sup>

Im Folgenden werden neben dem VaR auch alternative Risikomass vorgestellt, um aufzuzeigen, dass erstens das Risiko auf unterschiedliche Art und Weise gemessen werden kann und zweitens es nicht ein richtiges oder falsches Risikomass gibt, sondern nur ein für den Evaluationszweck geeignetes oder ungeeignetes Mass. Deshalb werden im Folgenden neben dem VaR auch die Shortfall-Masse kurz vorgestellt und ihre Vor- und Nachteile sowie ihre Anwendungsmöglichkeiten diskutiert.

### 2.4.1 Value-at-Risk

Namhafte Organisationen und Interessengruppen wie die "Group of Thirty", die "Derivatives Policy Group" oder die "International Swap and Derivatives Association"<sup>37</sup> sprachen sich schon früh nach Bekannt werden des Konzeptes für den Einsatz von VaR zur Messung der Marktrisiken aus. Das Standardkonzept, RiskMetrics- oder Varianz-Kovarianz-Methode genannt, wurde damals von der amerikanischen Investmentbank JP Morgan entwickelt und im Internet zusammen mit den Marktdaten zum kostenlosen Download bereitgestellt.

---

<sup>33</sup> Z.B. Capital Asset Pricing Model oder Arbitrage Pricing Theory. Vgl. Sharpe (1964), bzw. Ross (1976).

<sup>34</sup> Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (1996a); EBK (1997)

<sup>35</sup> Zur Steuerung und Überwachung des Handels z.B.

<sup>36</sup> Für eine Übersicht siehe z.B. Matten (1996), S. 58 ff.

<sup>37</sup> Group of Thirty (1993); Derivatives Policy Group (1995); International Swap and Derivatives Association (1995)

Der Durchbruch gelang aber erst, als sich im Januar 1996 der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht<sup>38</sup> in seinen Empfehlungen zu den Mindesteigenkapitalunterlegungsrichtlinien dafür aussprach, den Banken neu auch zu erlauben, ihre Marktrisiken im Handelsbereich mit internen VaR-Modellen zu quantifizieren.<sup>39</sup> Heutzutage ist der VaR weit verbreitet und wird sowohl in der Wissenschaft als in der Praxis zur Marktrisikomessung eingesetzt.

### Definition des VaR

Zunächst seien nochmals die grundlegenden Annahmen des VaR-Konzepts festgehalten. Der Zustand des Marktvektors  $\mathbf{X}$  am Ende der Betrachtungsperiode  $[0, T]$  ist zum Anfangszeitpunkt unbekannt. Unbekannt ist ebenfalls, ob am Ende ein Gewinn oder ein Verlust auf dem Portfolio resultiert. Einzig die G/V-Verteilung des Portfolios  $F_{\Delta P}$  sei anfänglich bekannt,

$$F_{\Delta P}(y) = \Pr(\Delta P \leq y), \quad y \in \mathbb{R}, \quad (2-17)$$

da diese aus der gemeinsamen Verteilung der Marktfaktoren und der G/V-Funktion des Portfolios geschätzt werden kann.<sup>40</sup> Unter diesen Voraussetzungen sind deshalb nur wahrscheinlichkeitsgewichtete Aussagen bezüglich potenzieller zukünftiger Verluste möglich. Eine davon ist der VaR:

$VaR(1-\alpha)$  entspricht dem maximalen Verlustbetrag, der mit einer Wahrscheinlichkeit von  $(1-\alpha)$  während des Zeitraums  $T$  nicht überschritten wird.

Beträgt z.B. der VaR zum *Konfidenzniveau*<sup>41</sup> von 95% 10'000 GE, so wird der Verlust des Portfolios am Ende der *Halteperiode*  $T$  lediglich mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% grösser als 10'000 GE sein.

---

<sup>38</sup> Besteht aus den Zentralbankgouverneuren sowie Vertretern der Bankaufsichtsbehörden der G-10-Staaten, Luxemburg und der Schweiz.

<sup>39</sup> Vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (1996a), S. 39-47

<sup>40</sup> Die Verteilungsfunktion von  $\Delta P$  kann in der Regel nicht in einer analytisch-geschlossenen Form dargestellt werden, sondern muss durch vereinfachende Annahmen bezüglich der gemeinsamen Verteilung der Marktfaktoren und/oder der G/V-Funktion approximativ geschätzt werden.

<sup>41</sup> Gebräuchliche Konfidenzniveaus sind  $(1-\alpha) = 95\%$ , bzw.  $(1-\alpha) = 99\%$ . Vgl. Konfidenzniveau, S. 29

Mathematisch entspricht  $VaR(1-\alpha)$  dem negativen<sup>42</sup>  $\alpha$ -Quantil der G/V-Verteilung<sup>43</sup>

$$VaR(1-\alpha) = -F_{\Delta P}^{-1}(\alpha), \quad \text{falls } F_{\Delta P}^{-1}(\alpha) < 0. \quad (2-18)$$

Das  $\alpha$ -Quantil ist eindeutig durch die *verallgemeinerte inverse Verteilungsfunktion* bestimmt<sup>44</sup>

$$F_{\Delta P}^{-1}(\alpha) = \sup \{ y \mid F_{\Delta P}(y) \leq \alpha \} \quad (2-19)$$

Im Spezialfall, bei dem die Risikolage derart günstig ist, dass die Wahrscheinlichkeit von Verlusten kleiner als  $\alpha$  ist, wird VaR Null gesetzt<sup>45</sup>

$$VaR(1-\alpha) = 0, \quad \text{falls } F_{\Delta P}^{-1}(\alpha) > 0. \quad (2-20)$$

In kompakter Form kann  $VaR(1-\alpha)$  definiert werden als

$$VaR(1-\alpha) = \sup \{ 0, -F_{\Delta P}^{-1}(\alpha) \}. \quad (2-21)$$

Im Weiteren wird der Spezialfall der Einfachheit halber ausgeschlossen.

---

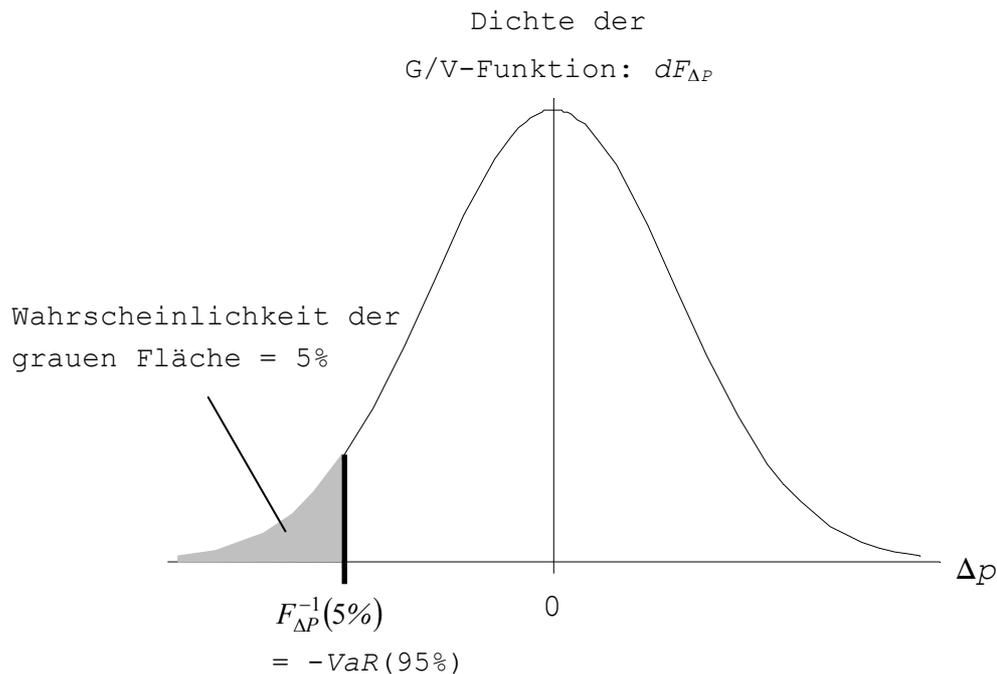
<sup>42</sup> Üblicherweise wird der  $VaR(1-\alpha)$  als positiver (Verlust-) Betrag angegeben. Die  $\alpha$ -Quantile der G/V-Verteilung für VaR-übliche Konfidenzniveaus sind aber in der Regel negativ.

<sup>43</sup> Vgl. Jorion (1996), S. 91; Studer (1995), S. 4; Duffie/Pan (1997), S. 29

<sup>44</sup> Für detaillierte Ausführungen zu den formalen Aspekten der VaR-Definitionen siehe Huschens (1999)

<sup>45</sup> Um negative VaR-Werte auszuschliessen.

Abbildung 2-4: VaR zum Konfidenzniveau von 95%



Wie man anhand der Abbildung 2-4 erkennt, gehört VaR zu den *asymmetrischen Risikomassen*, da er zwischen Gewinn- und Verlustpotenzial unterscheiden kann.<sup>46</sup> Im Folgenden soll kurz auf die beiden für VaR wichtigen Begriffe Haltedauer und Konfidenzniveau eingegangen werden.

### Haltedauer

Die *Haltedauer*, auch *Risikohorizont*, *Halte-* oder *Liquidationsperiode* genannt, bezeichnet den Zeitraum  $T$ , während dem das gesamte Portfolio den Marktschwankungen ausgesetzt ist. Es wird also davon ausgegangen, dass über diesen Zeitraum keine Zu- oder Verkäufe stattfinden.

Die Länge der Halteperiode hängt zwar primär vom Evaluationszweck<sup>47</sup> ab, sollte aber mindestens gleich lang oder länger als die voraussichtliche Liquidationszeit des Portfolios sein.<sup>48</sup> Die Liquidationszeit entspricht der Zeit, die benötigt wird, um sämtliche Finanzinstrumente des Portfolios zu veräußern, ohne dadurch die Marktpreise zu beeinflussen.<sup>49</sup> Entsprechend kann die Halteperiode eines kleinen Handelsportfolios, das ausschliesslich

<sup>46</sup> Im Gegensatz dazu ist die Varianz, bzw. Volatilität, ein symmetrisches Risikomass.

<sup>47</sup> Bei der Limitensetzung im Handel beträgt die Halteperiode oftmals 1, 3 oder 10 Tage. Bei der Messung des regulatorisch notwendigen Eigenkapitals muss die Halteperiode mindestens 10 Handelstage betragen. Vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (1996a), S. 45

<sup>48</sup> Vgl. Smithson/Minton (1996b), S. 39

<sup>49</sup> Vgl. Lawrence/Robinson (1995), S. 52; Jorion(1996), S. 86

aus liquiden Instrumenten besteht und dessen Liquidationszeit somit gering ist, kürzer gewählt werden als jene eines grossen schwer liquidierbaren Portfolios.<sup>50</sup>

### Konfidenzniveau

Das Konfidenzniveau, auch *Vertrauensniveau* oder *Sicherheitswahrscheinlichkeit* genannt, bezeichnet formal den "Grad der Sicherheit" einer *Intervallschätzung*.<sup>51</sup> Beim VaR bestimmt das Konfidenzniveau  $(1-\alpha)$  die Wahrscheinlichkeit, dass  $\Delta p$  des Portfolios innerhalb des Intervalls  $[-VaR(1-\alpha), +\infty)$  liegt, d.h. dass der Portfolioverlust nicht grösser als  $VaR(1-\alpha)$  ist.

Direkt verknüpft mit dem Konfidenzniveau  $(1-\alpha)$  ist die *Irrtumswahrscheinlichkeit*  $\alpha$ , die der Wahrscheinlichkeit entspricht, dass  $\Delta p$  ausserhalb des vorgegebenen Intervalls liegt. Wird z.B. der VaR zum Konfidenzniveau von 99% berechnet, so beträgt die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha = 1\%$ . Im Schnitt wird somit der Portfolioverlust in einem von hundert Fällen grösser als  $VaR(99\%)$  sein.

Es gelten die Beziehungen:

Je höher das Konfidenzniveau, desto grösser der VaR und desto geringer die Irrtumswahrscheinlichkeit.

Wie die Länge der Halteperiode hängt auch die Wahl des Konfidenzniveaus vom Evaluationszweck ab. Deshalb erstaunt es nicht, dass in der Praxis unterschiedliche Konfidenzniveaus zur Anwendung kommen. Hier ein paar Beispiele:

- Zur Berechnung der aufsichtsrechtlichen Eigenmittelanforderungen muss das Konfidenzniveau 99% betragen (bei einer Haltedauer von zehn Handelstagen).<sup>52</sup>
- Im RiskMetrics-Technical-Dokument wird vorgeschlagen den VaR auf einem Konfidenzniveau von 95% zu basieren (bei einer Haltedauer von einem Handelstag).<sup>53</sup>
- Jorion (1996) empfiehlt, das Konfidenzniveau in Abhängigkeit der Risikoaversion des Risikoträgers sowie der Kosten, die bei einem den VaR überschreitenden Verlust anfallen, zu wählen.<sup>54</sup>

---

<sup>50</sup> Vgl. Jorion (1996), S. 86

<sup>51</sup> Vgl. Bosch (1998), S. 352

<sup>52</sup> Vgl. Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (1996a), S. 45

<sup>53</sup> Vgl. RiskMetrics (1996), S. 6

<sup>54</sup> Vgl. Jorion (1996), S. 87

## Anwendungsbereiche des VaR

Die Anwendungsmöglichkeiten des VaR sind vielfältig. Hier seien lediglich einige Beispiele ohne Anspruch auf Vollständigkeit aufgeführt:

- Berechnung der Mindesteigenkapitalanforderung
- Messung, Steuerung und Überwachung der Marktrisiken (z.B. im Handel)<sup>55</sup>
- Messung der risikoadjustierten Performance<sup>56</sup>
- Kapitalallokation innerhalb eines Unternehmens<sup>57</sup>

## Kritische Würdigung des VaR

Abgesehen davon, dass der VaR nur ein grobes Abbild der realen Zusammenhänge der Finanzmärkte und deren Produkte darstellt, setzt die Kritik hauptsächlich an zwei Punkten an. Erstens erfüllt der VaR nicht alle Anforderungen, die an ein *kohärentes* Risikomass gestellt werden<sup>58</sup>, und zweitens sagt der VaR nichts über *extreme* Verluste aus.<sup>59</sup> Während z.B. die Handelsgeschäfte unter gewöhnlichen Marktbedingungen mit Hilfe des VaR verlässlich gesteuert und kontrolliert werden können, sind zur Beurteilung des Risikos in Phasen angespannter Marktsituationen zusätzliche Risikokennzahlen und Resultate aus Stressszenarien erforderlich.<sup>60</sup>

### 2.4.2 Shortfall-Masse

Eine ideale Ergänzung zum VaR bilden die Shortfall-Masse.<sup>61</sup> Sie gehören ebenfalls zur Familie der asymmetrischen Risikomasse und messen das Verlustpotenzial, falls ein Zielergebnis  $\tau$  (Target)<sup>62</sup> unterschritten wird. Entsprechend konzentrieren sie sich speziell auf den linken Rand der G/V-Verteilung, also auf die Verteilung der Verlustzone.

Roy (1952) schlug als Erster vor, das Risiko mit Hilfe des *Target-Shortfalls*<sup>63</sup> zu messen. Der Target-Shortfall entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass ein vordefinierter Verlusthöchstwert (Target) überschritten wird. Der Target-Shortfall lässt sich mit Hilfe der *Lower-Partial-Moment-Masse* (LPM-Masse) bestimmen.

<sup>55</sup> Vgl. RiskMetrics (1996), S. 34; Jorion (1996), S. 281

<sup>56</sup> Vgl. RiskMetrics (1996), S. 34; Jorion (1996), S. 285-290; Wilson (1996), S. 195-196

<sup>57</sup> Matten (1996), S. 58 ff.

<sup>58</sup> VaR erfüllt die Eigenschaft der Subadditivität nicht. Die Subadditivität fordert von einem kohärenten Risikomass, dass das Verlustpotenzial eines Portfolios nicht grösser sein darf, als die Summe der Verlustpotenziale seiner Komponenten. Vgl. Artzner et al. (1997a), S. 68; Artzner et al. (1997b), S. 3 ff.; Read (1998), S. 25 ff.

<sup>59</sup> Vgl. Bahar et al. (1997), S. 100; Boudoukh/Richardson/Whitelaw (1995), S. 100-101; Artzner et al. (1997a), S. 68

<sup>60</sup> Vgl. Kubic (1998); Finger (1997); Kim/Finger (1999)

<sup>61</sup> Mit den MC-Methoden können selbstverständlich auch Shortfall-Masse quantifiziert werden.

<sup>62</sup> Z.B. der angestrebte Mindestgewinn

<sup>63</sup> Auch als Ausfallwahrscheinlichkeit bezeichnet

LPM-Masse stellen eine Übertragung der statistischen Momente auf bestimmte Teilbereiche der G/V-Verteilung dar. Das  $n$ -te Lower-Partial-Moment  $LPM_n(\tau)$  der G/V-Verteilung  $F_{\Delta P}$  für den Target  $\tau$  ist definiert als<sup>64</sup>

$$LPM_n(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - y)^n dF_{\Delta P}(y) \quad , n \in \mathbb{N} \quad (2-22)$$

Im Falle von  $n = 0$  erhält man den Target-Shortfall, also die Wahrscheinlichkeit einer Unterschreitung des Targets  $\tau$

$$\begin{aligned} LPM_0(\tau) &= \int_{-\infty}^{\tau} (\tau - y)^0 dF_{\Delta P}(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\tau} dF_{\Delta P}(y) \\ &= \Pr(\Delta P \leq \tau) \\ &= F_{\Delta P}(\tau) \end{aligned} \quad (2-23)$$

Von besonderem Interesse für das Risikomanagement sind die *bedingten Shortfall-Masse*. Der bedingte Shortfall-Erwartungswert z.B. bezeichnet den durchschnittlichen Verlust bei Eintreten eines Shortfalls.<sup>65</sup>

Setzt man den Target gleich dem (negativen) VaR,  $\tau = -VaR(1 - \alpha)$ , so misst der *Shortfall-VaR*  $(1 - \alpha)$  den zu erwartenden Verlust, falls  $VaR(1 - \alpha)$  überschritten wird<sup>66</sup>

$$SVaR(1 - \alpha) = E(-\Delta P \mid \Delta P \leq -VaR) = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{-VaR} y dF_{\Delta P}(y). \quad (2-24)$$

<sup>64</sup> Bawa (1975), S. 110; Bawa/Lindenberg (1977), S. 191

<sup>65</sup> Vgl. Artzner et al. (1997a), S. 68; Portmann/Wegmann (1998), S. 334-335

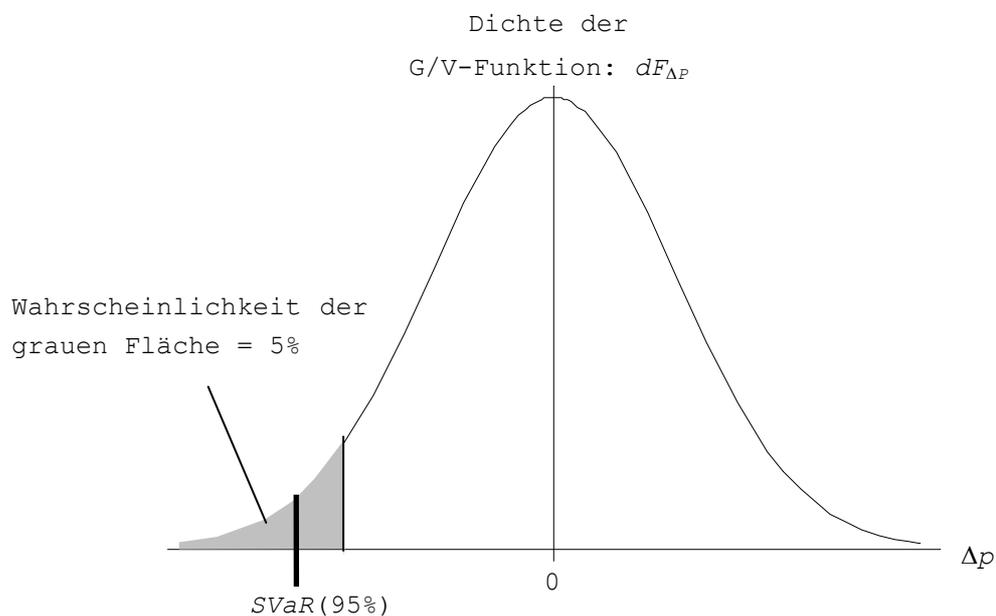
<sup>66</sup> Auf die explizite Angabe des Konfidenzniveaus wird in diesem Beispiel aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Der SVaR kann in eine direkte Beziehung zu VaR und den LPM-Massen gesetzt werden:

$$\begin{aligned}
 -VaR - \frac{LPM_1(-VaR)}{LPM_0(-VaR)} &= -VaR - \frac{\int_{-\infty}^{-VaR} (-VaR - y) dF_{\Delta P}(y)}{\int_{-\infty}^{-VaR} dF_{\Delta P}(y)} \\
 &= \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{-VaR} y dF_{\Delta P}(y) \\
 &= SVaR(1 - \alpha)
 \end{aligned} \tag{2-25}$$

Der SVaR ergänzt den herkömmlichen VaR in idealer Weise, da er die durchschnittliche Verlussterwartung für jene Fälle beziffert, bei denen der Verlust den VaR überschreitet (vgl. Abbildung 2-5). Darüber hinaus besitzt der SVaR im Gegensatz zum traditionellen VaR die Eigenschaft der Kohärenz.<sup>67</sup>

Abbildung 2-5: Shortfall-VaR zum Konfidenzniveau von 95%



<sup>67</sup> Vgl. Artzner et al. (1997b), S. 3-8; Artzner et al. (1997a), S. 69

## 2.5 Zusammenfassung

Das zweite Kapitel befasste sich eingehend mit den vier Bausteinen der Marktrisikomessung. Als Erstes werden die für den Wert des Portfolios verantwortlichen Marktfaktoren identifiziert. In einem zweiten Schritt werden die preisrelevanten Marktfaktoren mathematisch abgebildet, wobei statistische und finanzmarkttheoretische Methoden gezielt eingesetzt werden, um die Anzahl der zu modellierenden Faktoren möglichst gering zu halten, damit das Modell übersichtlich und praktisch anwendbar bleibt.

Bei der VaR-Berechnung wird in der Regel, falls die Haltedauer  $T$  der Marktrisikomessung genügend kurz ist, ein (konditioniert multivariat-) normalverteilter Risikovektor unterstellt, obwohl diese Verteilungsannahme empirisch nicht erhärtet werden kann. Besondere Beachtung muss der Schätzung der Kovarianzmatrix, die die Informationen der gemeinsamen Marktfaktorbewegungen enthält, geschenkt werden.

Der dritte Baustein ist die G/V-Funktion des Portfolios. Sie hängt von den im Portfolio enthaltenen Instrumenten ab. Im Sinne einer groben Kategorisierung von Portfolios wurden drei Portfoliotypen definiert: lineares, konvexes und komplexes Portfolio. Beim linearen Portfolio liegt ein konstantes Verhältnis zwischen Preis- und Marktfaktoränderung vor. Ein konvexes Portfolio weist ausgeprägte Krümmungseigenschaften auf während ein komplexes Portfolio selbst mit den ersten beiden Taylor-Termen nur ungenügend approximiert werden kann.

Der vierte und letzte Baustein ist das Marktrisikomass, das in Abhängigkeit vom Evaluationszweck gewählt werden muss. Obwohl sich das Quantilsmass  $VaR(1-\alpha)$  als Standardkennzahl zur Quantifizierung von Marktrisiken durchgesetzt hat und unbestritten viele Vorteile besitzt, darf es nicht unreflektiert in die Entscheidungsprozesse des Risikomanagements einbezogen werden. So erfüllt der VaR z.B. nicht alle Eigenschaften, die an ein kohärentes Risikomass gestellt werden. Auch eignet sich der VaR nicht in angespannten Marktsituationen, da die Kennzahl nichts über potenzielle Extremverluste verrät. Der VaR sollte deshalb durch weitere Risikomasse, wie z.B. Shortfall-Masse, ergänzt werden.

### 3 MC-Methoden mit G/V-Approximationen

In diesem Kapitel werden die MC-Methoden vorgestellt, deren Genauigkeiten und Rechenaufwände im zweiten Teil gemessen und miteinander verglichen werden. Sämtliche Methoden basieren auf MC-Simulationen und unterscheiden sich lediglich in Bezug auf die Approximation der G/V-Funktionen der zugrunde liegenden Portfolios.

Zur Erinnerung seien hier nochmals die ausgewählten MC-Methoden aufgeführt:

- Full-MC-Methode
- Delta-Methode
- Delta-Gamma-Methode
- PCA-Grid-Methode
- PLS-Grid-Methode

In Abschnitt 3.1 wird zunächst die Full-MC-Methode beschrieben. Hierbei wird kurz auf das Grundkonzept der MC-Simulation eingegangen, das auf dem Satz von Glivenko beruht. Die folgenden beiden Abschnitte befassen sich mit den MC-Methoden, bei denen die G/V-Funktionen von Portfolios mit Hilfe von Taylor-Approximationen geschätzt werden. Abschnitt 3.2 stellt die Delta-, Abschnitt 3.3 die Delta-Gamma-Methode vor. Darauf folgen zwei Abschnitte, die den MC-Methoden mit Grid-Approximationen gewidmet sind. Abschnitt 3.4 beschreibt die PCA-Grid-Methode, wobei in diesem Abschnitt zuerst das Konzept der Grid-Approximation illustriert wird, dann das der Hauptkomponentenanalyse, um am Ende die beiden Elemente zur PCA-Grid-Approximation zusammenzuführen. Abschnitt 3.5 stellt die PLS-Grid-Methode vor, die im Gegensatz zur PCA-Grid-Methode nicht die PCA-Faktoren, sondern die PLS-Faktoren als Basis für den Grid einsetzt. Sämtliche Konzepte werden anhand einfacher Anwendungsbeispiele dargestellt.

Der Abschluss dieses Kapitels bildet der Abschnitt 3.6, in dem aufgezeigt wird, wie Grid-Approximationen auf grosse und umfangreiche Portfolios, die von einer Vielzahl von Marktfaktoren abhängen, angewandt werden können.

### 3.1 Full-MC-Methode

Die Full-MC-Methode basiert auf der klassischen MC-Simulation.<sup>1</sup> Mit MC-Simulationen lassen sich Probleme lösen, bei denen konventionelle mathematische Konzepte versagen. Erstmals 1942 in Los Alamos von Atomphysikern angewandt, ist die Methode heute weit verbreitet und hat in vielen Bereichen der Wissenschaft Einzug gehalten. So auch in der Finanzmarkttheorie, wo sie z.B. zur Bewertung derivativer Instrumente oder aber, wie im Folgenden dargestellt, zur Ermittlung des VaR dient.<sup>2</sup>

Das Prinzip der MC-Simulation beruht auf dem Satz von Glivenko, der besagt:<sup>3</sup>

Besitzt die Zufallsvariable  $Y$  die Verteilungsfunktion  $F_Y(y)$ , so lässt sich aufgrund  $n$  unabhängiger Realisationen  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  eine künstliche<sup>4</sup> Verteilungsfunktion  $\tilde{F}_Y(y)$  bestimmen. Diese künstliche Verteilung  $\tilde{F}_Y(y)$  konvergiert gegen die wahre  $F_Y(y)$ , wenn  $n$  gegen unendlich strebt.<sup>5</sup>

Mit Hilfe der MC-Simulation können also auch G/V-Verteilungen von Portfolios geschätzt werden, die mit traditionellen mathematischen Mitteln nicht mehr bestimmt werden können.<sup>6</sup>

#### 3.1.1 Prozessablauf der MC-Simulation

Zur Umsetzung der MC-Simulation stehen verschiedene Ansätze zur Verfügung.<sup>7</sup> Der hier vorgestellte MC-Prozess erfolgt in drei Schritten:

MC-Schritt 1: Erzeugung der MC-Szenarien

MC-Schritt 2: Ermittlung der G/V-Werte der Szenarien

MC-Schritt 3: Anordnung der Resultate und Bestimmung des VaR

#### MC-Schritt 1: Erzeugung der MC-Szenarien

Gemäss der Definitionsgleichung

---

<sup>1</sup> Für detaillierte Ausführungen hierzu vgl. Hammersley/Handscorn (1964); Kalos/Whitlock (1986); Shreider (1966)

<sup>2</sup> In Dupire (1998) finden sich eine Reihe von Fachartikeln zu diesem Thema.

<sup>3</sup> Vgl. Bosch (1998), S.331; Fisz (1978), S. 456

<sup>4</sup> Wenn die Schätzung auf beobachteten Daten beruht, spricht man von einer empirische Verteilungsfunktion.

<sup>5</sup> Für eine rigorose mathematische Darstellung des Satzes sowie dessen Beweis siehe Fisz (1978), S. 456-459

<sup>6</sup> Z.B. Portfolios mit nicht-linearen Instrumenten.

<sup>7</sup> Vgl. Jorion (1996), S. 231-245

(2–3), kann der Marktvektor  $\mathbf{X}$  in Abhängigkeit des Risikovektors  $\mathbf{S}$  dargestellt werden

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S}. \quad (3-1)$$

Mit Hilfe zufälliger und unabhängiger Risikovektorszenarien werden nun mögliche "Was-wäre-wenn"-Marktszenarien simuliert.<sup>8</sup>

Bezeichnet<sup>9</sup>

$$\mathbf{s}_{\bullet,j} = \begin{pmatrix} s_{1,j} \\ \vdots \\ s_{M,j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, N^{MC}, \quad (3-2)$$

die  $j$ -te zufällige Ausprägung des Risikovektors  $\mathbf{S}$ , so beschreibt

$$\mathbf{x}_{\bullet,j} = \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{s}_{\bullet,j} \quad (3-3)$$

das  $j$ -te Marktszenario.

Zur Erzeugung der zufälligen Risikovektorszenarien sind verschiedene Ansätze möglich. Zum Beispiel kann zwischen Parametrischer und Historischer Simulation<sup>10</sup> unterschieden werden. Während bei der historischen Simulation effektiv aufgetretene Marktfaktoränderungen zur Anwendung kommen, werden bei der parametrischen Simulation die Risiko-vektorausprägungen künstlich auf der Basis eines mathematisch-statistischen Marktfaktormodells und eines Zufallszahlengenerators erzeugt.

Die weiteren Ausführungen beschränken sich auf die parametrische MC-Simulation unter Annahme eines multivariat-normalverteilten Risikovektors  $\mathbf{S} \sim N_M(\mathbf{0}, \underline{\underline{\Sigma}})$ . Für MC-Simulationen auf Basis nicht-normalverteilter Renditen sei auf Duffie/Pan (1997), Quinlan (1998), Hull/White (1998), Shaw (1998) und Glassermann/Heidelberger/Shahabuddin (2000b) verwiesen.

<sup>8</sup> Auch als "What-if"-Szenarien bezeichnet.

<sup>9</sup> T steht für transponiert und nicht für die Zeit  $T$ .

<sup>10</sup> Für eine detaillierte Darstellung der Historischen Simulation siehe Jorion (1996), S. 193 ff.; Pritsker (2001); Beder (1995); Hendricks (1996); Boudoukh/Richardson/Whitelaw (1998)

Zur synthetischen Erzeugung der Ausprägungen der Risikokomponenten stehen verschiedene Techniken zur Verfügung, wie z.B. das *Cholesky-Verfahren*<sup>11</sup> oder die Hauptkomponentenmethode.<sup>12</sup> Auf die Hauptkomponentenmethode - in dieser Arbeit mit PCA-Methode bezeichnet - wird später noch ausführlich eingegangen.<sup>13</sup> An dieser Stelle soll nun zunächst das Cholesky-Verfahren dargestellt werden.

Der Risikovektor  $\mathbf{S}$  kann als Linearkombination eines standardnormalverteilten Zufallsvektors  $\boldsymbol{\varepsilon}$  mit Hilfe der Cholesky-Matrix  $\underline{\underline{\mathbf{L}}}$  erzeugt werden

$$\mathbf{S} = \underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3-4)$$

$\underline{\underline{\mathbf{L}}}$  bezeichnet eine  $(M \times M)$ -Linksmatrix<sup>14</sup> mit der Eigenschaft<sup>15</sup>

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\Sigma}}} = \underline{\underline{\mathbf{L}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{L}}}^T, \quad (3-5)$$

und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  einen  $(M \times 1)$ -Vektor mit unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_M(\mathbf{0}, \underline{\underline{\mathbf{I}}}). \quad (3-6)$$

Mit dem Cholesky-Verfahren lassen sich demnach die  $N^{MC}$  Marktszenarien  $\mathbf{s}_{\bullet,j}$ ,  $j = 1, \dots, N^{MC}$ , auf Basis eines standardnormalverteilten Zufallsvektors  $\boldsymbol{\varepsilon}$  erzeugen. Bei der Computerbasierten MC-Simulation werden die zufälligen Ausprägungen von  $\boldsymbol{\varepsilon}$  mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators hergestellt.<sup>16</sup>

### MC-Schritt 2: Berechnung der G/V-Werte der Szenarien

In einem zweiten Schritt werden die entsprechenden Gewinne und Verluste des Portfolios für die  $N^{MC}$  Marktszenarien ermittelt. Bei der Full-MC-Methode wird der G/V-Wert jedes

<sup>11</sup> Vgl. Press et al. (1997), S. 96; Jorion (1996), S. 242; Picoult (1998), S. 217

<sup>12</sup> Vgl. Alexander et al. (1998), S. 22; Jamshidian/Zhu (1997), S. 46

<sup>13</sup> Vgl. 3.4.7 PCA-Methode, S.59

<sup>14</sup> Matrix, in der alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen den Wert Null besitzen. Auch als untere Dreiecksmatrix bekannt. Vgl. Bronstein et al. (1999), S. 252

<sup>15</sup> Eine positiv definite symmetrische Matrix kann eindeutig in das Produkt einer unteren Dreiecksmatrix und ihrer Transponierten aufgespalten werden. Da das Gleichungssystem genau so viele unabhängige Gleichungen wie Unbekannte besitzt, kann man es rekursiv auflösen. Vgl. Bronstein et al. (1999), S. 887; Press et al. (1997), S. 96; Maess (1985), S. 79

<sup>16</sup> Techniken zur Erzeugung von Zufallsvariablen finden sich bei Press et al. (1997), S. 274; Dagpunar (1988); Knuth (1969); Kalos/Whitlock (1986); Überhuber (1995), S. 467 ff.

einzelnen Marktszenarios durch totale Neubewertung aller Instrumente des Portfolios ermittelt. Mit Hilfe der Bewertungsfunktion  $P(\mathbf{X})$  bestimmt sich der G/V-Wert für das  $j$ -te Marktszenario mit

$$\Delta p_j = P(\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{s}_{\bullet,j}) - P(\bar{\mathbf{X}}), \quad j = 1, \dots, N^{MC}. \quad (3-7)$$

### MC-Schritt 3: Anordnung der Resultate und Bestimmung des VaR

Werden die durch Simulation gefundenen G/V-Werte sämtlicher  $N^{MC}$  MC-Szenarien der Grösse nach geordnet,<sup>17</sup>  $\Delta p_{(1)} < \Delta p_{(2)} < \dots < \Delta p_{(N^{MC})}$ , dann gilt für die künstliche, durch MC-Simulation geschätzte G/V-Verteilung<sup>18</sup>

$$F_{\Delta P}^{FMC}(y) = \begin{cases} 0 & \text{für } y < \Delta p_{(1)} \\ \frac{j}{N^{MC}} & \text{für } \Delta p_{(j)} \leq y < \Delta p_{(j+1)} \quad (j = 1, \dots, N^{MC} - 1) \\ 1 & \text{für } y > \Delta p_{(N^{MC})} \end{cases} \quad (3-8)$$

Da es sich bei den durch MC-Simulation erzeugten G/V-Werten um unabhängige Realisierungen der Zufallsvariablen  $\Delta P$  handelt, greift der Satz von Glivenko, der besagt, dass die künstliche Verteilung  $F_{\Delta P}^{FMC}(y)$  gegen die wahre G/V-Verteilung  $F_{\Delta P}(y)$  konvergiert, wenn die Anzahl der Szenarien  $N^{MC}$  gegen unendlich strebt.<sup>19</sup> Selbiges gilt auch für das geschätzte  $\alpha$ -Quantil  $(F_{\Delta P}^{FMC})^{-1}(\alpha)$ ,<sup>20</sup> das dem (negativen) VaR( $1-\alpha$ ) entspricht.

Der Full-MC-VaR( $1-\alpha$ ) lässt sich direkt aus den nach der Grösse geordneten G/V-Ergebnissen der Full-MC-Simulation ablesen. Dabei gilt gemäss den Gleichungen (3-8) und (2-21)

<sup>17</sup> Unterstellt man eine stetige, monoton wachsende Verteilungsfunktion  $F_{\Delta P}$  der wahren G/V-Funktion, so ist eine eindeutige Ordnung möglich. Vgl. Bosch (1998), S. 686; Fisz (1978), S. 438

<sup>18</sup> Vgl. Fisz (1978), S. 438

<sup>19</sup> Der Satz von Glivenko und sein Beweis finden sich Fisz (1979), S. 456-459

<sup>20</sup> Der Beweis findet sich ebenfalls bei Fisz (1978), S. 442-443

$$\begin{aligned}
 VaR^{FMC}(1-\alpha) &= \sup \left\{ 0, -\left(F_{\Delta P}^{FMC}\right)^{-1}(\alpha) \right\} \\
 &= \sup \left\{ 0, -\Delta p \left(\lfloor \alpha \cdot N^{MC} \rfloor + 1\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{3-9}$$

wobei  $\lfloor \cdot \rfloor$  den ganzzahligen Anteil des Klammerausdrucks bezeichnet.

Die Full-MC-Methode gilt als ausserordentlich flexibel in Bezug auf den unterstellten Marktfaktorprozess und die Komplexität der G/V-Funktion. Diese Flexibilität hat aber auch ihren Preis und zwar in Form eines erheblichen Rechenaufwands zur Ermittlung des VaR. Dieser kann unter Umständen den operationellen Einsatz der Methode im täglichen Risikomanagement, wo die Zeitkomponente eine wichtige Rolle spielt, erschweren oder sogar verunmöglichen. Dieses Problem wird in Kapitel 6 eingehend behandelt.

### 3.1.2 Anwendungsbeispiel: Short-Caplet-Portfolio<sup>21</sup>

Die Full-MC-Methode sowie die noch zu erläuternden Methoden werden anhand eines einfachen Portfolios illustriert und miteinander verglichen. Damit sich die Resultate der verschiedenen Methoden auch voneinander unterscheiden, wird bewusst ein nicht-lineares Portfolio gewählt, wohl wissend, dass z.B. die Delta-Methode den VaR falsch einschätzen wird.

Das zur Illustrierung ausgewählte Portfolio besteht lediglich aus einer Short-Position eines sehr kurzfristigen Caplets. Ein Caplet kann als eine Europäische-Call-Option auf eine Forwardrate<sup>22</sup> betrachtet und mit einer abgeänderten Form des *Black-76-Modells*<sup>23</sup> bewertet werden. Detaillierte Angaben zum Caplet, seiner Berechnungsweise und zum Zahlenmaterial des Anwendungsbeispiels finden sich im Anhang.<sup>24</sup>

Ziel des Anwendungsbeispiels ist es, den VaR des Short-Caplet-Portfolios zu bestimmen. Für das Beispiel wird eine eintägige Haltedauer ( $T = 1$  Tag) unterstellt und vereinfachend

<sup>21</sup> Sämtliche Details und Zahlenwerte zum Anwendungsbeispiel finden sich im Anhang unter 8.2 Zahlenmaterial für das Anwendungsbeispiel: Short-Caplet-Portfolio, S. 182 ff.

<sup>22</sup> Im Black-76-Modell entspricht die Forwardrate dem Underlying des Caplets. Die Forwardrate lässt sich aus der aktuellen Zinskurve herleiten. Vgl. 8.6 Bestimmung der Forwardrate, S. 188

<sup>23</sup> Vgl. Black (1976)

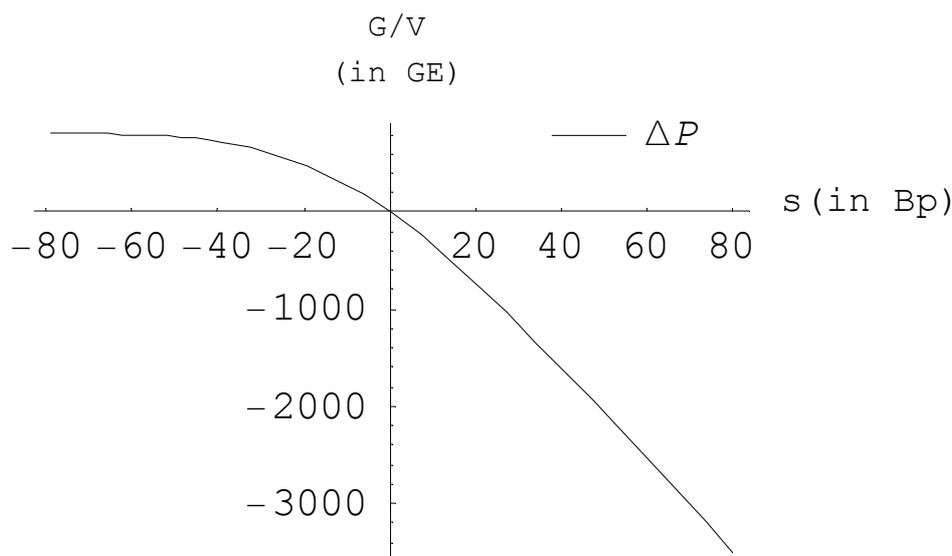
<sup>24</sup> Vgl. 8.2 Zahlenmaterial für das Anwendungsbeispiel: Short-Caplet-Portfolio, S. 182 ff.

davon ausgegangen, dass das Underlying des Caplets, also die Forwardrate, der einzige zufällige Marktfaktor sei.<sup>25</sup>

Um in der gewohnten Notation zu verbleiben, bezeichnet  $X$  das Underlying des Caplets und  $S = X - \bar{X}$  die Abweichung des Underlyings vom Erwartungswert. Für das Beispiel wird unterstellt, dass  $S \sim N(0, \sigma^2)$ . Die tägliche absolute Volatilität des Underlyings beträgt  $\sigma = 20$  Basispunkte (Bp).

In Abbildung 3-1 wird die G/V-Funktion des Short-Caplet-Portfolios dargestellt. Ist die Risikokomponente positiv,<sup>26</sup>  $S > 0$ , erfährt das Portfolio einen Verlust. Ist sie negativ,  $S < 0$ , resultiert ein Gewinn.

Abbildung 3-1: G/V-Funktion des Short-Caplet-Portfolios



Zur Schätzung der G/V-Verteilung des Portfolios wird nun die Full-MC-Methode herangezogen. In der Abbildung 3-2 sieht man, wie sich die künstliche, durch MC-Simulation erzeugte Wahrscheinlichkeitsdichte der G/V-Funktion  $dF_{\Delta P}^{FMC}$  (Histogramm)<sup>27</sup> der wahren Dichtefunktion  $dF_{\Delta P}$  (Linie)<sup>28</sup> mit zunehmender Anzahl MC-Szenarien annähert.

<sup>25</sup> Alle übrigen Bewertungsfaktoren des Caplets, wie der Refinanzierungssatz oder die Volatilität der Forwardrate werden vereinfachend als konstant angenommen.

<sup>26</sup> Forwardrate > Erwartungswert der Forwardrate

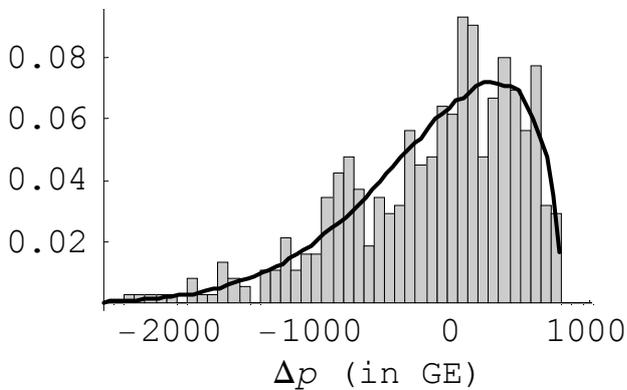
<sup>27</sup> Im Histogramm werden die relativen Häufigkeiten durch Flächeninhalte von Rechtecken senkrecht über den einzelnen G/V-Ausprägungen dargestellt. Vgl. Bosch (1998), S. 6

<sup>28</sup> Full-MC-Methode mit 1 Mio. Marktszenarien.

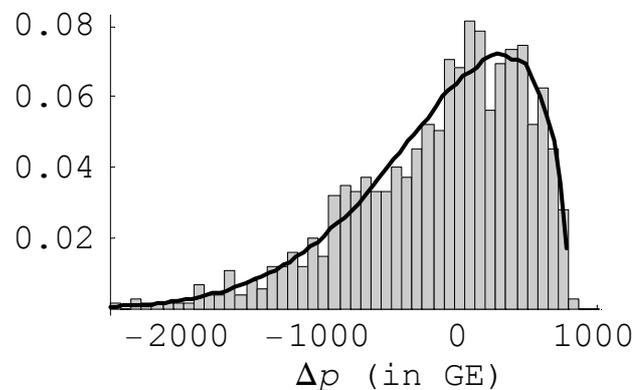
Abbildung 3-2: Künstlich erzeugte versus wahre Wahrscheinlichkeitsdichte der G/V-Funktion

 $dF_{\Delta p}^{FMC}$  bei 500 Marktszenarien

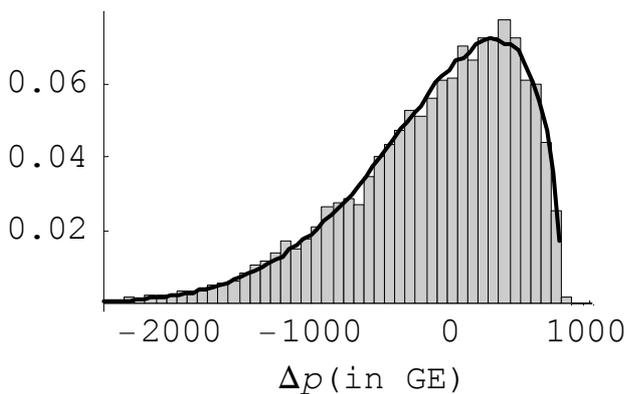
(in %)

 $dF_{\Delta p}^{FMC}$  bei 1'000 Marktszenarien

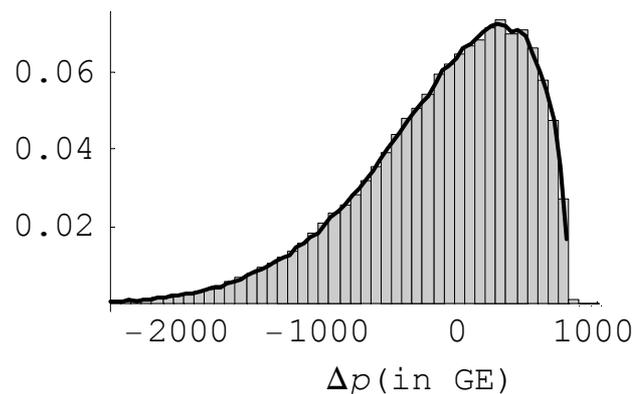
(in %)

 $dF_{\Delta p}^{FMC}$  bei 10'000 Marktszenarien

(in %)

 $dF_{\Delta p}^{FMC}$  bei 100'000 Marktszenarien

(in %)



Mit den künstlich erzeugten G/V-Werten lässt sich ebenfalls der VaR gemäss der Gleichung (3–9) bestimmen. Auch hier gilt: Je mehr Szenarien, desto genauer die VaR-Schätzung (vgl. Resultate der Tabelle 3-1). Während z.B. der  $VaR^{FMC}(99\%)$  mit 500 MC-Szenarien den wahren VaR noch um rund 6% überschätzt, liegt der mit 100'000 MC-Szenarien berechnete  $VaR^{FMC}(99\%)$  mit einer prozentualen Abweichung von 0.05% nur leicht über dem wahren VaR.

Tabelle 3-1: VaR-Schätzung bei unterschiedlicher Anzahl MC-Szenarien

Anzahl Szenarien	500	1000	10'000	100'000
$VaR^{FMC}(99\%)$	2028 GE	1850 GE	1951 GE	1918 GE
Absolute Abweichung*	119 GE	59 GE	42 GE	9 GE

\* Abweichung der VaR-Schätzung vom wahren VaR(Full-MC-Methode mit 1 Mio. Szenarien):  $VaR(99\%)=1'909$  GE

### 3.2 Delta-Methode

Da die Full-MC-Methode durch die zahlreichen Portfolioneubewertungen sehr rechenintensiv werden kann, sollen in den folgenden vier Abschnitten Methoden vorgestellt werden, die durch geeignete Approximationen der G/V-Funktion den Rechenaufwand der MC-Simulation erheblich verringern können.

Die Delta-Methode wendet die wohl einfachste G/V-Approximation an. Statt nach jedem Szenario das gesamte Portfolio neu zu bewerten, wird der Gewinn bzw. Verlust direkt mit Hilfe der Taylor-Approximation erster Ordnung (Lineare oder Delta-Approximation) geschätzt. Für die Delta-G/V-Funktion gilt<sup>29</sup>

$$\Delta P^{Del} = \boldsymbol{\delta}^T \cdot \mathbf{S} . \quad (3-10)$$

Da aber bei der Delta-Approximation lediglich Terme erster Ordnung berücksichtigt werden, bleibt ihre Anwendung auf lineare Portfolios beschränkt.<sup>30</sup>

Im Standardfall, bei dem ein multivariat-normalverteilter Risikovektor unterstellt wird, besitzt die Delta-Methode eine geschlossene analytische Lösung (RiskMetrics-Methode)<sup>31</sup>

$$VaR^{Del}(1-\alpha) = z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\boldsymbol{\delta}^T \cdot \underline{\underline{\Sigma}} \cdot \boldsymbol{\delta}} , \quad (3-11)$$

wobei  $z_{1-\alpha}$  das Quantil der Standardnormalverteilung bezeichnet.<sup>32</sup>

#### 3.2.1 Fortsetzung des Anwendungsbeispiels: Short-Caplet-Portfolio

Wiederum soll der VaR des bereits bekannten Short-Caplet-Portfolios quantifiziert werden, diesmal aber mittels der Delta-Methode. Dazu wird zunächst der Delta-Wert<sup>33</sup> des Portfolios bestimmt

$$\delta = \left. \frac{\partial P(X)}{\partial X} \right|_{\bar{X}} \approx -310'249 \quad (3-12)$$

<sup>29</sup> Vgl. Delta-Vektor, S.21

<sup>30</sup> Vgl. Lineares Portfolio, S. 22

<sup>31</sup> Vgl. Fallon (1996), S. 7; Pritsker (1996), S. 7; Jorion (1996), S. 207; RiskMetrics (1996), S. 126

<sup>32</sup> Z.B. VaR(99%):  $z_{99\%} \approx 2.33$ ; VaR(95%):  $z_{95\%} \approx 1.65$

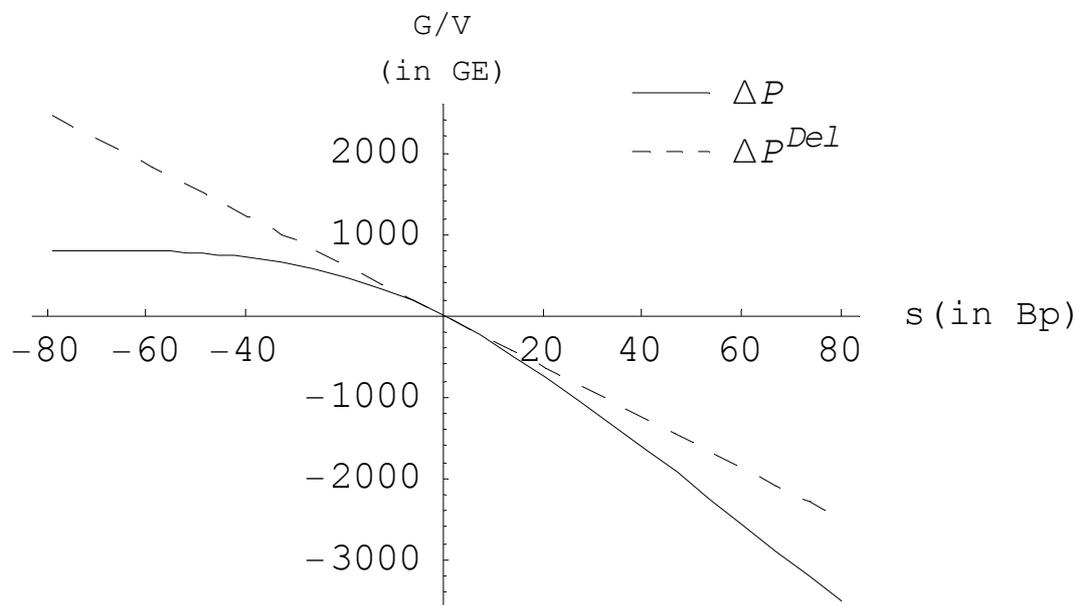
<sup>33</sup> Das Zahlenmaterial zum Beispiel findet sich im Anhang unter: 8.2.1 Delta des Short-Caplet-Portfolios, S.183

Gemäss linearer Approximation führt eine positive Abweichung des Marktfaktors von seinem Erwartungswert von einem Basispunkt ( $S = 0.01\%$ ) zu einem Verlust von 31 GE.

$$\Delta P^{Del} = \delta \cdot S = -310'249 \cdot 0.01\% \approx -31$$

In der Abbildung 3-3 wird zur Veranschaulichung die Delta-G/V-Funktion der wahren G/V-Funktion gegenübergestellt. Wie die Grafik aufzeigt, unterschätzt die Delta-G/V-Funktion das effektive Verlustpotenzial des vorliegenden Portfolios.

Abbildung 3-3: G/V-Funktion versus Delta-G/V-Funktion des Short-Caplet-Portfolios



Da für das Anwendungsbeispiel des Short-Caplet-Portfolios eine normalverteilte Risikokomponente  $S \sim N(0, \sigma^2)$  unterstellt wurde, wird der VaR im vorliegenden Zahlenbeispiel nicht mittels der eigentlichen Delta-Methode (MC-Simulation mit Delta-Approximationen) sondern mit Hilfe der RiskMetrics-Methode bestimmt. Der erste Grund dafür ist, dass der durch die Delta-(MC-)Methode berechnete VaR bei einer grossen Anzahl MC-Szenarien gegen den RiskMetrics-VaR konvergiert<sup>34</sup>. Zweitens eignet sich die RiskMetrics-Methode aufgrund ihrer analytisch-geschlossenen Form besser zur Darstellung des Zahlenbeispiels als die entsprechende MC-Methode.

<sup>34</sup> Unter Voraussetzung normalverteilter Marktfaktoränderungen

Bei lediglich einem Marktfaktor gilt für den (RiskMetrics-) Delta-VaR

$$VaR^{Del}(1-\alpha) = z_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\delta^2 \cdot \sigma^2} . \quad (3-13)$$

Daraus ergeben sich für das Short-Caplet-Portfolio folgende VaR-Resultate

$$\begin{aligned} VaR^{Del}(95\%) &= z_{95\%} \cdot \sqrt{\delta^2 \cdot \sigma^2} \\ &= 1.65 \cdot \sqrt{(-310'249)^2 \cdot (0.002)^2} \approx 1'024 \end{aligned} \quad (3-14)$$

und

$$\begin{aligned} VaR^{Del}(99\%) &= z_{99\%} \cdot \sqrt{\delta^2 \cdot \sigma^2} \\ &= 2.33 \cdot \sqrt{(-310'249)^2 \cdot (0.002)^2} \approx 1'441 . \end{aligned} \quad (3-15)$$

Wie bereits die Abbildung 3-3 zeigte, unterschätzt die Delta-Methode das wahre Marktrisiko, da bei der Delta-Approximation Abhängigkeiten höherer Ordnung gegenüber dem Marktfaktor unberücksichtigt bleiben. Die wahren VaR-Werte des Portfolios betragen  $VaR(95\%) = 1'285$  GE und  $VaR(99\%) = 1'909$  GE.<sup>35</sup> Die Delta-Methode unterschätzt somit den wahren VaR je nach Konfidenzniveau um rund 20%, bzw. 24%.<sup>36</sup>

<sup>35</sup> Full-MC-Methode mit 1 Mio. Szenarien

<sup>36</sup> Gemessen in Prozenten des wahren VaR

### 3.3 Delta-Gamma-Methode

Die Delta-Gamma-Methode berücksichtigt bei der Taylor-Approximation der G/V-Funktion neben den Termen erster Ordnung (Delta-Terme) auch die Terme zweiter Ordnung (Gamma-Terme)

$$\Delta P^{DG} = \delta^T \cdot \mathbf{S} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \underline{\underline{\Gamma}} \cdot \mathbf{S}. \quad (3-16)$$

Somit können auch Konvexitätseigenschaften der G/V-Funktion berücksichtigt werden. Der MC-Prozess der Delta-Gamma-Methode verläuft analog zur Full-MC-Methode, mit dem einzigen Unterschied, dass während des zweiten Schritts des Prozessablaufs die G/V-Werte nicht durch Neubewertungen des Portfolios, sondern durch Delta-Gamma-Approximationen ermittelt werden.<sup>37</sup>

#### 3.3.1 Fortsetzung Anwendungsbeispiel: Short-Caplet-Portfolio

Illustriert wird die Delta-Gamma-Methode wiederum mit Hilfe des schon bekannten Short-Caplet-Portfolios. Neben dem Delta-Wert benötigt die Delta-Gamma-Methode auch den Gamma-Wert<sup>38</sup>

$$\gamma = \left. \frac{\partial^2 P(X)}{\partial X^2} \right|_{\bar{X}} \approx -6.3216 \cdot 10^7. \quad (3-17)$$

Liegt der Marktfaktor um einen Basispunkt über seinem Erwartungswert ( $S = 0.01\%$ ), so führt das gemäss der Delta-Gamma-approximierten G/V-Funktion zu einem Verlust von rund 31.6 GE

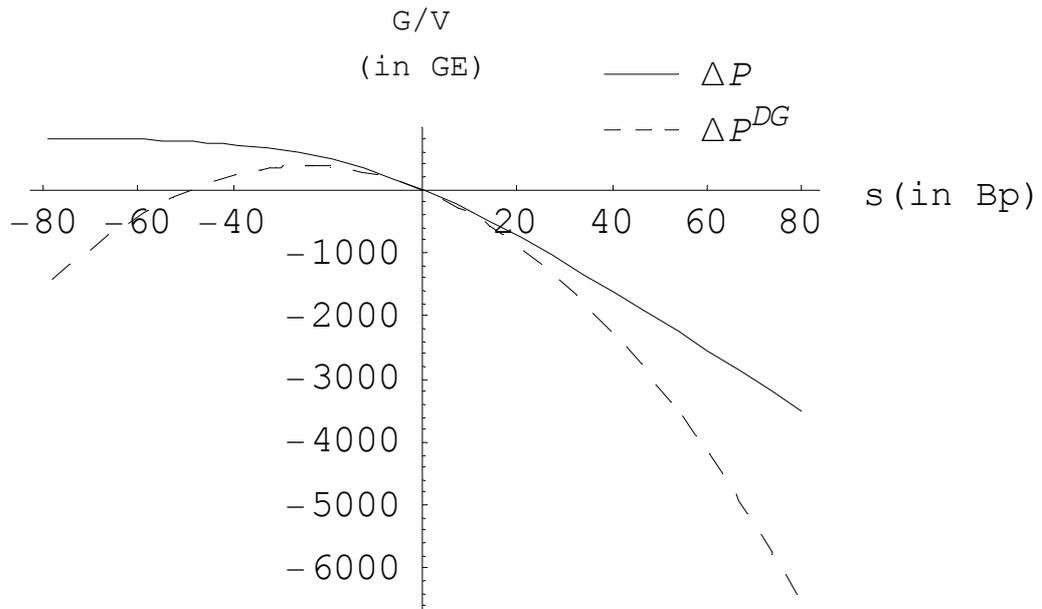
$$\begin{aligned} \Delta P^{DG} &= \delta \cdot S + \gamma \cdot S^2 \\ &= -310'249 \cdot 0.01\% - 6.3216 \cdot 10^7 \cdot (0.01\%)^2 \approx -31.6 \end{aligned} \quad (3-18)$$

In der Abbildung 3-4 wird die Delta-Gamma-approximierte G/V-Funktion im Vergleich zur wahren dargestellt. Es zeigt sich, dass die Delta-Gamma-G/V-Funktion  $\Delta P^{DG}$  zwar näher bei der wahren G/V-Funktion  $\Delta P$  liegt, als die Delta-G/V-Funktion  $\Delta P^{Del}$ , dass aber bei grossen Marktfaktoränderungen auch hier die Taylor-Approximation ungenau wird. Beim Short-Caplet-Portfolio z.B. überschätzt die Delta-Gamma-Approximation den potenziellen

<sup>37</sup> Vgl. 3.1.1 Prozessablauf der MC-Simulation, S. 35

Verlust, da die wahre Krümmung bei zunehmender Abweichung des Marktfaktors von seinem Erwartungswert wieder abnimmt. Dies führt dazu, dass der VaR durch die Delta-Gamma-Methode als zu hoch eingeschätzt wird, da die Krümmung (Gamma-Term) im Delta-Gamma-Modell konstant ist.

Abbildung 3-4: G/V-Funktion versus Delta-Gamma-G/V-Funktion



Wird der VaR mit der Delta-Gamma-Methode und 1 Mio. Szenarien berechnet, so erhält man die Resultate

$$VaR^{DG}(95\%) \approx 1'363 \text{ GE} \quad \text{und} \quad VaR^{DG}(99\%) \approx 2'128 \text{ GE}. \quad (3-19)$$

Tabelle 3-2: VaR-Resultate im Überblick

	Delta	%-Fehler*	Delta-Gamma	%-Fehler	Wahrer VaR**
VaR(95%)	1'024 GE	-20.3%	1'363 GE	+6.1%	1'285 GE
VaR(99%)	1'441 GE	-24.5%	2'128 GE	+11.5%	1'909 GE

\* %-Fehler: Prozentuale Abweichung vom wahren VaR.

\*\* Full-MC-Methode mit 1 Mio. Szenarien.

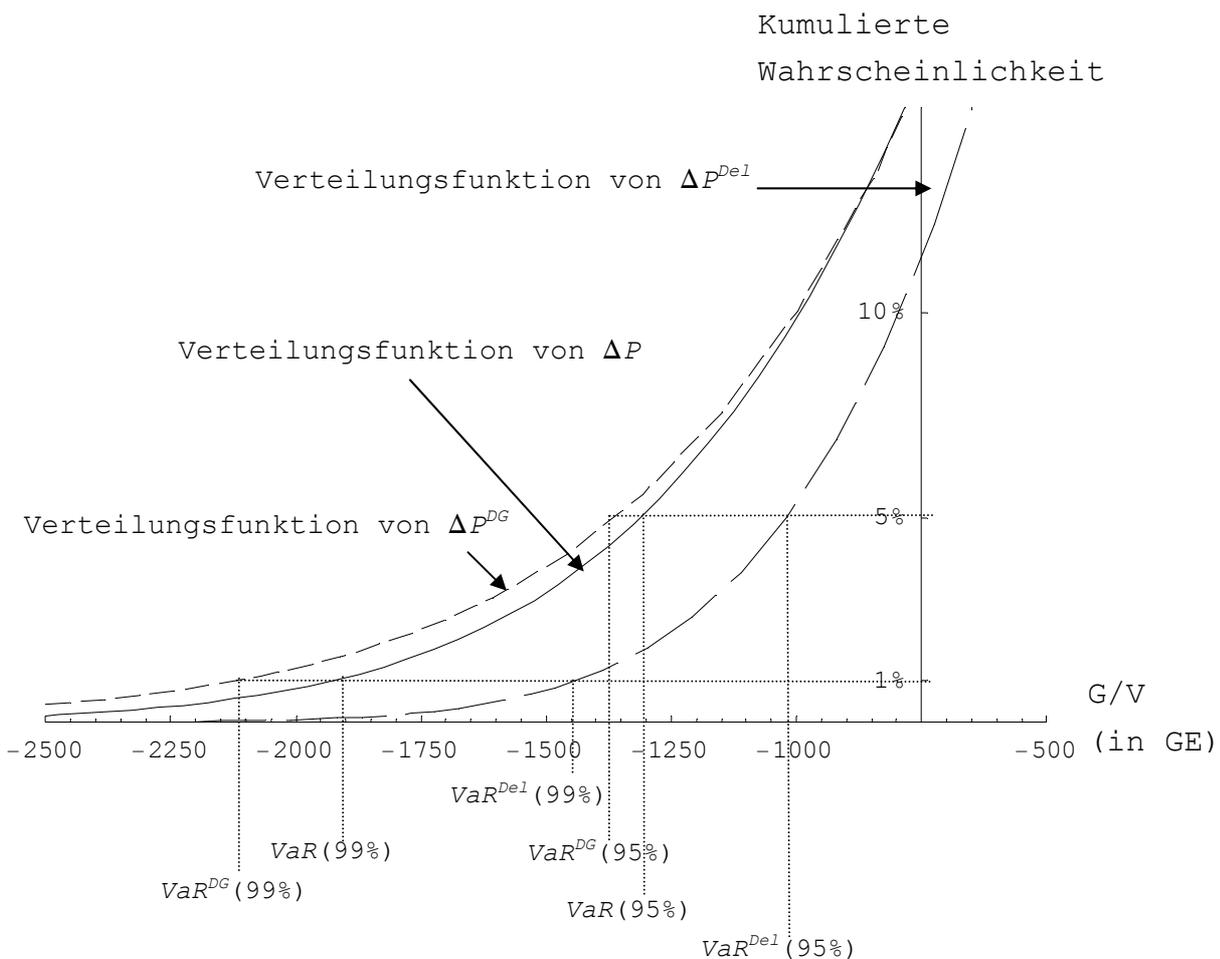
In der Tabelle 3-2 werden die Resultate der Delta- und der Delta-Gamma-Methode einander gegenübergestellt. Man sieht, dass die Delta-Methode den wahren VaR unterschätzt, da

<sup>38</sup> Das Zahlenmaterial findet sich im Anhang unter: 8.2.2 Gamma des Short-Caplet-Portfolios, S.184

sie die Krümmung unberücksichtigt lässt, während die Delta-Gamma-Methode ihn überschätzt, da sie die Krümmungsabnahme nicht wiedergibt. Diese Fehleranalyse bezieht sich natürlich lediglich auf das vorliegende Short-Caplet-Portfolio und besitzt keine Allgemeingültigkeit. Das Beispiel soll nur dazu dienen, die unterschiedlichen Approximationsmethoden zu vergleichen und mögliche Fehlerquellen offenzulegen.

In Abbildung 3-5 sind für den direkten Vergleich die Verteilungen der G/V-Funktionen der verschiedenen Methoden aufgezeichnet. Zur Ermittlung der Verteilungsfunktionen wurden 1 Mio. MC-Szenarien eingesetzt und die Gewinne und Verluste mittels der entsprechenden G/V-Funktionen ( $\Delta P$ ,  $\Delta P^{Del}$ ,  $\Delta P^{DG}$ ) berechnet. Mit den künstlich hergestellten G/V-Werten können dann gemäss Gleichung (3–8) die entsprechenden Verteilungen geschätzt werden.<sup>39</sup>

Abbildung 3-5: G/V-Verteilungen im Vergleich



<sup>39</sup> Vgl. MC-Schritt 3: Anordnung der Resultate und Bestimmung des VaR, S. 38

Wie Abbildung 3-5 zeigt, unterschätzt die Verteilungsfunktion von  $\Delta P^{Del}$  durchwegs das Verlustpotenzial des Short-Caplet-Portfolios. Sowohl der  $VaR^{Del}(95\%)$  als auch der  $VaR^{Del}(99\%)$  sind zu klein. Sie unterschätzen den wahren VaR um 20.3% bzw. um 24.5%. Die Delta-Gamma-Methode hingegen überschätzt das Portfoliorisiko, insbesondere die Extremverluste, wegen der Annahme einer konstanten Krümmung. Die Überschätzung liegt beim  $VaR^{DG}(95\%)$  bei 6.1% und beim  $VaR^{DG}(99\%)$  bei 11.5%. Die Resultate sind selbstverständlich nur für das vorliegende Portfolio gültig.

### 3.4 PCA-Grid-Methode

Die PCA-Grid-Methode kombiniert zwei Techniken zur Approximation der G/V-Funktion. Die erste Technik, die PCA-Methode,<sup>40</sup> reduziert zunächst die Dimensionalität der bewertungsrelevanten Marktfaktoren und legt damit die Grundlage für die Wirksamkeit der zweiten Technik, der Grid-Approximation.<sup>41</sup>

Die hier vorgestellte PCA-Grid-Methode stammt von Frye (1998). Als Inspiration diente ihm die Arbeit von Jamshidian/Zhu (1997), die mit Hilfe der PCA-Methode die wichtigsten Faktoren (die ersten PCA-Faktoren)<sup>42</sup> der Zinsdynamik ermittelten und diese mit einer diskreten Verteilung modellierten.<sup>43</sup> Zwar war der Vorschlag zur Verwendung der PCA-Faktoren zur Abbildung der Zinskurve nicht neu.<sup>44</sup> Innovativ hingegen war die Idee, die Zustände der Zinskurve diskret abzubilden.

Angenommen die Dynamik der Zinskurven wird mit den ersten drei PCA-Faktoren abgebildet, wobei der erste PCA-Faktor 7, der zweite PCA-Faktor 5 und der dritte PCA-Faktor 3 diskrete Zustände annehmen können, dann ergeben sich für dieses Modell insgesamt  $7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$  mögliche Zustände der Zinskurve. Für jeden Zinskurvenzustand kann der Gewinn, bzw. Verlust des Portfolios sowie dessen Eintretenswahrscheinlichkeit ermittelt werden,<sup>45</sup> so dass eine diskrete G/V-Verteilung für das Portfolio resultiert.

Wie aber Abken (2000) und Gibson/Pritsker (2000) in ihren Untersuchungen aufzeigen, führt die Methode von Jamshidian/Zhu (1997) vor allem bei nicht-linearen Portfolios zu unbefriedigenden Ergebnissen, falls die PCA-Faktoren nur wenige diskrete Zustände annehmen können. Frye (1998) verbesserte deshalb die Methode von Jamshidian/Zhu (1997), indem er eine stetige Verteilung für die PCA-Faktoren zuließ und gleichzeitig die G/V-Funktion des Portfolios mit Hilfe eines multidimensionalen Grids approximiert.

Im folgenden Abschnitt wird zuerst die Grid-Approximation und danach die PCA-Methode aufgezeigt, um danach die beiden Techniken der PCA-Grid-Methode zusammenzuführen. Am Ende wird das Konzept an einem Beispiel illustriert.

---

<sup>40</sup> Vgl. 3.4.7 PCA-Methode, S. 59

<sup>41</sup> Vgl. 3.4.1 Grid-Approximation, S. 50

<sup>42</sup> Pro Memoria: Mit den PCA-Faktoren werden in dieser Arbeit die Hauptkomponenten bezeichnet.

<sup>43</sup> Die Autoren unterstellen binomialverteilte PCA-Faktoren.

<sup>44</sup> Vgl. Tabelle 3-7: Anwendung der PCA-Methode zur Beschreibung der Zinsstrukturdynamik

<sup>45</sup> Da die PCA-Faktoren voneinander unabhängig sind, entspricht die Eintretenswahrscheinlichkeit eines diskreten Zinskurvenzustands dem Produkt der Eintretenswahrscheinlichkeiten der entsprechenden PCA-Faktor-Zustände. Vgl. Jamshidian/Zhu (1997), S. 48

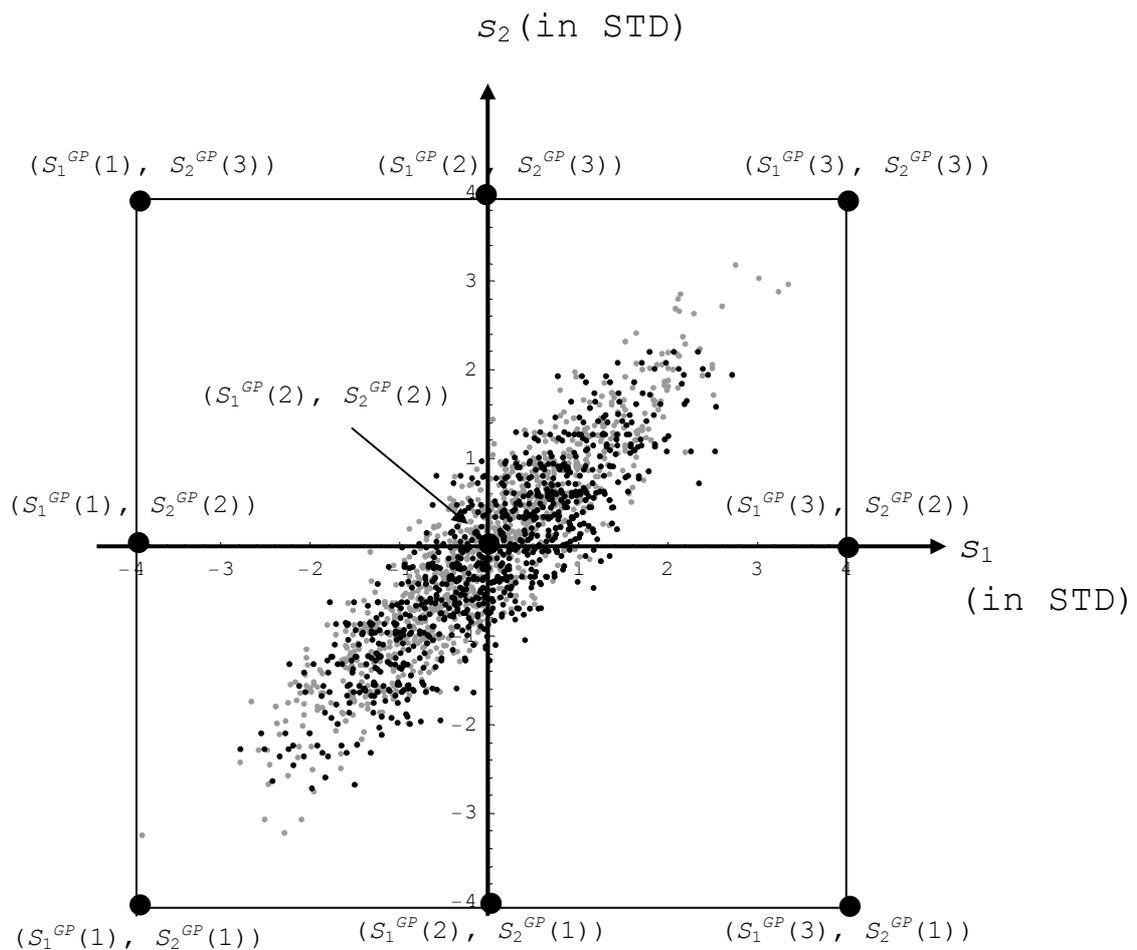
### 3.4.1 Grid-Approximation

Bei Portfolios mit komplexen G/V-Funktionen<sup>46</sup> ist weder die Delta- noch die Delta-Gamma-Approximation in der Lage, das Risiko adäquat abzubilden. Die Grid-Approximation nähert im Gegensatz zur Taylor-Approximation die G/V-Funktion nicht von einem einzigen Punkt aus, sondern berücksichtigt bei der Annäherung eine Vielzahl unterschiedlicher Funktionspunkte der G/V-Funktion. Zwar wird das Konzept der Grid-Approximation aus Darstellungsgründen lediglich für den zweidimensionalen Fall aufgezeigt. Es ist aber durchaus möglich, die Methode auf weitere Dimensionen auszudehnen.

### 3.4.2 Grid-Approximation für den zweidimensionalen Fall

Im zweidimensionalen Fall hängt die G/V-Funktion  $\Delta P(S_1, S_2)$  ausschliesslich von den beiden Risikokomponenten  $S_1$  und  $S_2$  ab.

Abbildung 3-6: Zweidimensionaler 3x3-Grid



<sup>46</sup> Vgl. Komplexes Portfolio, S. 24

In Abbildung 3-6 wird der Zustandsraum der beiden Risikokomponenten dargestellt, wobei entlang der Abszisse die Werte der ersten Risikokomponente  $S_1$  und entlang der Ordinate die Werte von  $S_2$  abgetragen werden. Die Einheiten der Achsen entsprechen der Standardabweichung der Risikokomponenten.

Die Punktwolke stellt historisch beobachtete, paarweise eingetretene Werte der Risikokomponenten dar. Sie soll einen groben Eindruck über die bivariate Verteilung der Risikokomponenten vermitteln.<sup>47</sup> Über diesen Zustandsraum wird nun ein rechteckiger Grid (Gitter) gespannt.

### 3.4.3 Bestimmung der Grid-Punkte

Der vorliegende 3x3-Grid wird durch drei *Grid-Punkte*<sup>48</sup>  $S_1^{GP}(j)$ ,  $j = 1,2,3$  der ersten Risikokomponenten und drei Grid-Punkte  $S_2^{GP}(k)$ ,  $k = 1,2,3$  der zweiten Risikokomponenten aufgespannt. Sowohl die Anzahl der Grid-Punkte als auch der Abstand zwischen den Grid-Punkten kann der Komplexität der zu Grunde liegenden G/V-Funktion angepasst werden, falls diese im Voraus bekannt ist. Grundsätzlich gilt: Je feiner der Grid, desto genauer die Grid-Approximation.

### 3.4.4 Zusammenstellung der Grid-Tabelle

Die Werte-Tupel

$$\left\{ \left( S_1^{GP}(j), S_2^{GP}(k) \right) \mid j, k = 1, 2, 3 \right\} \quad (3-20)$$

werden als *Knotenpunkte* bezeichnet. Ein Knotenpunkt definiert einen möglichen Marktzustand (z.B. Zustand einer Zinskurve).

Für alle Knotenpunkte lassen sich die Gewinne, bzw. Verluste des Portfolios berechnen

$$\Delta P^{GP}(j)(k) = \Delta P(S_1^{GP}(j), S_2^{GP}(k)), \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (3-21)$$

<sup>47</sup> Die Punktwolke wurde künstlich hergestellt und dient lediglich zur Veranschaulichung.

<sup>48</sup> Auch als Stützstellen bezeichnet

und tabellarisch zusammenfassen. Die Tabelle, die im Weiteren als Grid-Tabelle bezeichnet wird, beinhaltet sämtliche G/V-Werte des Portfolios für sämtliche Knotenpunkte (vgl. Tabelle 3-3).<sup>49</sup>

Tabelle 3-3: Grid-Tabelle mit den G/V-Werten für die neun Knotenpunkte

	$S_2^{GP} (1)$	$S_2^{GP} (2)$	$S_2^{GP} (3)$
$S_1^{GP} (1)$	$\Delta P^{GP} (1) (1)$	$\Delta P^{GP} (1) (2)$	$\Delta P^{GP} (1) (3)$
$S_1^{GP} (2)$	$\Delta P^{GP} (2) (1)$	$\Delta P^{GP} (2) (2)$	$\Delta P^{GP} (2) (3)$
$S_1^{GP} (3)$	$\Delta P^{GP} (3) (1)$	$\Delta P^{GP} (3) (2)$	$\Delta P^{GP} (3) (3)$

Die Grid-Tabelle dient anschliessend als Grundlage zur Schätzung der G/V-Werte nicht-tabellierter Marktzustände. Dazu können unterschiedliche Interpolationstechniken eingesetzt werden. Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf die (bi-) lineare Interpolationsmethode.<sup>50</sup>

### 3.4.5 Lineare Grid-Interpolation

Angenommen, der G/V-Wert soll durch multi-lineare Interpolation für den Marktzustand  $(q_1, q_2)$  ermittelt werden, mit anderen Worten, für jenen Marktzustand, bei dem die Ausprägungen der Risikokomponenten  $S_1 = q_1$  bzw.  $S_2 = q_2$  betragen, so muss zunächst festgestellt werden, welche tabellierten Grid-Punkte  $q_1$  und  $q_2$  umfassen.

Es existiert genau ein  $j \in \{1,2,3\}$  und genau ein  $k \in \{1,2,3\}$ , so dass gilt<sup>51</sup>

$$S_1^{GP}(j) \leq q_1 \leq S_1^{GP}(j+1)$$

$$S_2^{GP}(k) \leq q_2 \leq S_2^{GP}(k+1). \quad (3-22)$$

Die Knotenpunkte dieser vier Grid-Punkte spannen einen rechteckigen Zustandsraum auf, der den Marktzustand  $(q_1, q_2)$  beinhaltet. Die G/V-Werte der Eckpunkte dieses Zustandsraums sind in der Grid-Tabelle enthalten und werden zur Vereinfachung der Notation im Gegenuhrzeigersinn durchnummeriert ( $\Delta P_i^{GP}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ), wobei die Nummerierung wie in Abbildung 3-7 in der linken unteren Ecke beginnt.

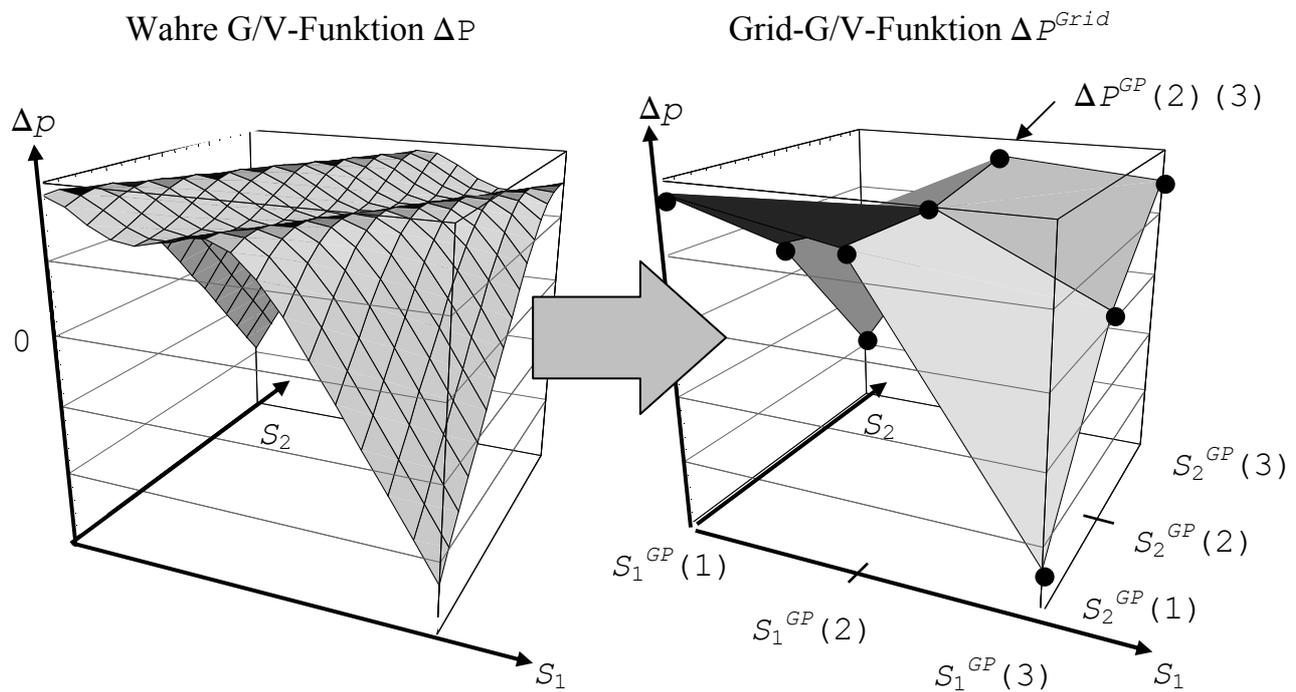
<sup>49</sup> Abken (2000), S. 9 nennt diese Tabelle "Lookup Table"

<sup>50</sup> Für eine Übersicht der Approximationstechniken, wie z.B. Lineare, Kubische oder Spline-Interpolationen, siehe Press et al. (1997), S. 105-128

<sup>51</sup> Es wird davon ausgegangen, dass die Punkte innerhalb der äussersten Grid-Punkte liegen. Bei einem Punkt ausserhalb des Grids müsste entsprechend linear extrapoliert werden.



Abbildung 3-8: Grid-Approximation mit einem 3x3-Grid und linearer Interpolation



### 3.4.6 Grid-Approximationsfehler

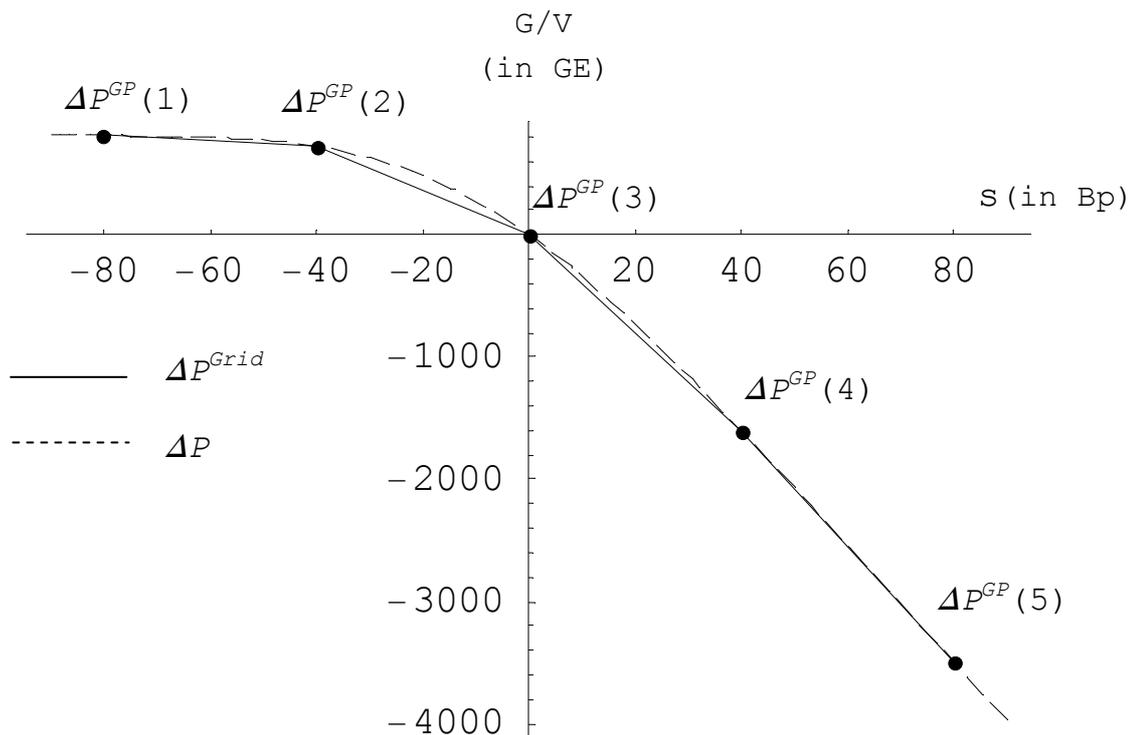
Wie sich aus Abbildung 3-8 erahnen lässt, hängt der Annäherungsfehler der Grid-Approximation massgeblich von der Anzahl der Grid-Punkte ab. Dieser Zusammenhang soll anhand der schon bekannten G/V-Funktion des Short-Caplet-Portfolios näher untersucht werden.<sup>53</sup>

In Abbildung 3-9 ist die wahre G/V-Funktion  $\Delta P$  des Short-Caplet-Portfolios im Vergleich zur mit fünf Grid-Punkten linear approximierten G/V-Funktion  $\Delta P^{Grid}$  aufgezeichnet. Der Grid beruht dabei auf äquidistanten Grid-Punkten, das heisst, die Abstände zwischen den Grid-Punkten sind alle gleich.<sup>54</sup>

<sup>53</sup> Vgl. 8.2 Zahlenmaterial für das Anwendungsbeispiel: Short-Caplet-Portfolio. S. 182

<sup>54</sup> Es ist aber auch durchaus denkbar, einen Grid mit unterschiedlich langen Grid-Abständen zu konstruieren. Falls z.B. eine G/V-Funktion in einem bestimmten Bereich besonders erratisch ist, kann durch den Einsatz zusätzlicher Grids die Approximation verbessert werden.

Abbildung 3-9: Grid-approximierte G/V-Funktion (mit fünf Grid-Punkten)

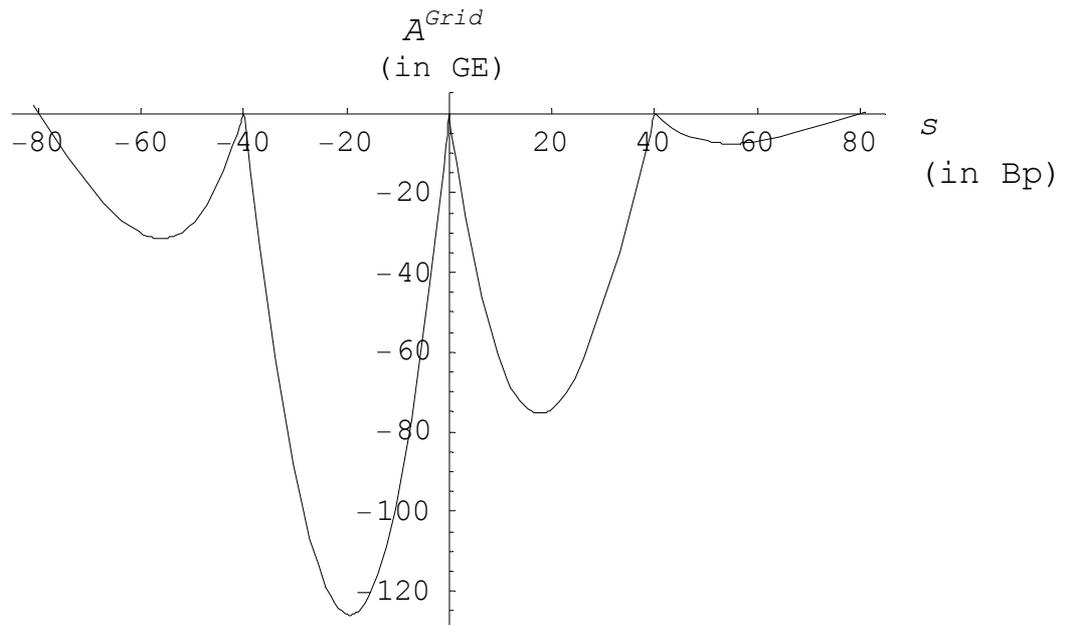


Bezeichnet man mit  $A^{Grid}$  die Abweichung der Grid-G/V-Funktion von der wahren G/V-Funktion

$$A^{Grid} = \Delta P^{Grid} - \Delta P, \quad (3-24)$$

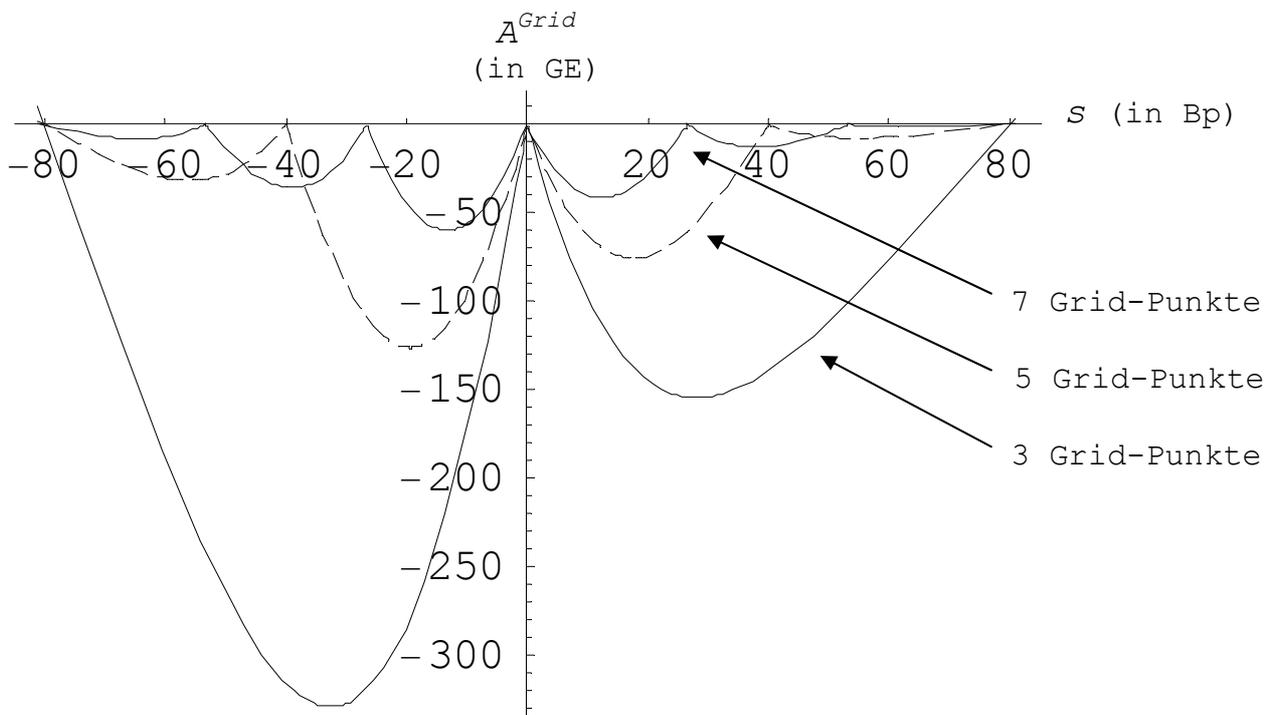
so ist diese im vorliegenden Beispiel durchwegs negativ, d.h. die lineare Grid-Approximation unterschätzt die Gewinne und überschätzt die Verluste. In Abbildung 3-10 wird nur der Verlauf des Grid-Approximationsfehlers dargestellt.

Abbildung 3-10: Grid-Approximationsfehler bei linearer Grid-Approximation mit 5 Grid-Punkten



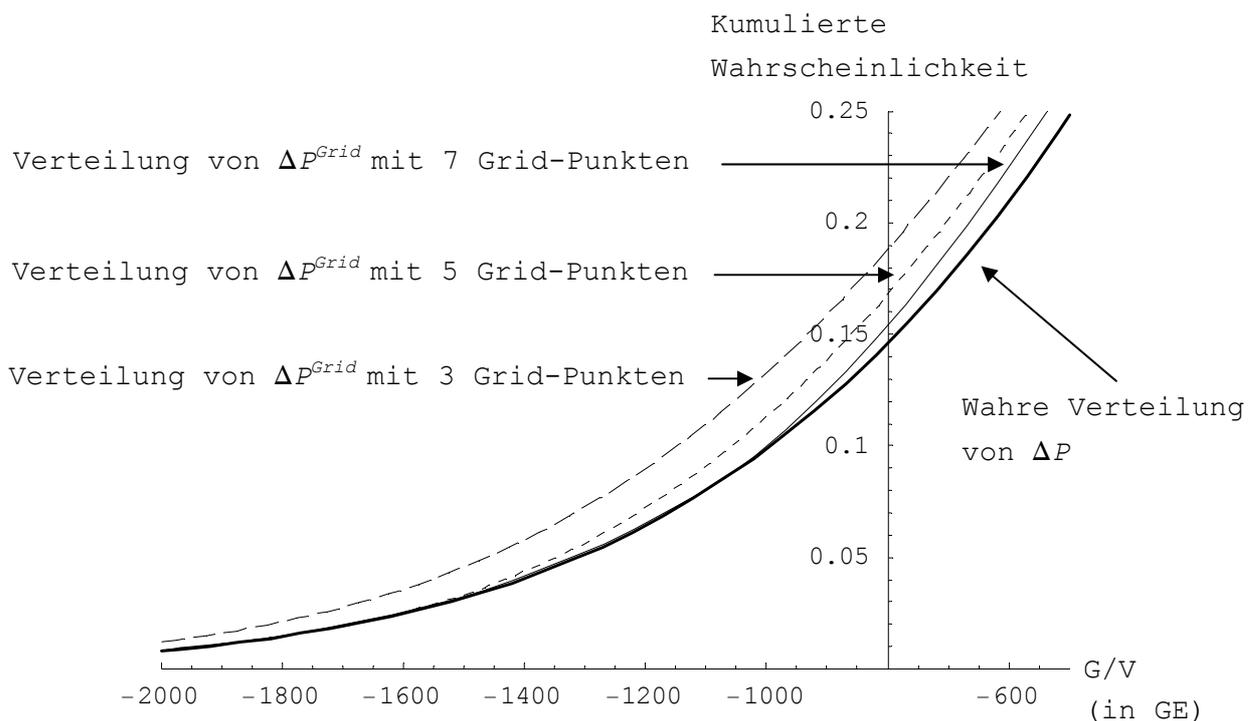
Wenn zur Grid-Approximation zusätzliche Grid-Punkte eingesetzt werden, reduziert sich der Grid-Approximationsfehler. Abbildung 3-11 zeigt die Approximationsfehler für grid-approximierte G/V-Funktionen mit 3, 5 und 7 Grid-Punkten.

Abbildung 3-11: Abnahme des Grid-Approximationsfehlers bei Zunahme der Grid-Punkte



Wird die G/V-Verteilung des Short-Caplet-Portfolios mit Hilfe einer MC-Simulation mit grid-approximierter G/V-Funktion geschätzt, wird diese Schätzung umso genauer, je mehr Grid-Punkte eingesetzt werden. In Abbildung 3-12 werden drei G/V-Verteilungen, die mit unterschiedlichen Grid-G/V-Funktionen ermittelt wurden, der wahren G/V-Verteilung gegenübergestellt.<sup>55</sup> Dabei wird die Schätzung der Verteilung umso genauer, je mehr Grid-Punkte bei der Approximation berücksichtigt werden.

Abbildung 3-12: Verteilung grid-approximierter G/V-Funktionen



Während die Schätzung des  $VaR(95\%)$  beim Short-Caplet-Portfolio bei einer Grid-Approximation mit 3 Grid-Punkten noch um beinahe 12% vom wahren Wert abweicht, beträgt die Abweichung bei einer Approximation mit 5 Grid-Punkten nur noch knapp 3% und liegt bei 7 Grid-Punkten sogar unter 1% (vgl. Tabelle 3-4). Bei hundert Grid-Punkten kann die prozentuale Abweichung kaum noch registriert werden. Es sei aber daran erinnert, dass sich die vorliegenden Resultate lediglich auf die G/V-Funktion des Short-Caplet-Portfolios beziehen und nicht verallgemeinert werden dürfen. Die einzige Aussage, die aufgrund der Testergebnisse gemacht werden kann, ist, dass sich die VaR-Schätzung verbessert, wenn die Anzahl der Grid-Punkte zunimmt.

<sup>55</sup> Künstliche Verteilungen, die auf der Basis von 1 Mio. MC-Szenarien geschätzt wurden.

Tabelle 3-4: Zunehmende Genauigkeit bei zunehmender Anzahl Grid-Punkte

Anzahl Grid-Punkte	VaR(95%) (in GE)	%-Fehler*	VaR(99%) (in GE)	%-Fehler
3	1'437	11.83%	2'032	6.44%
5	1'322	2.88%	1'917	0.42%
7	1'295	0.77%	1'915	0.31%
10	1'292	0.54%	1'910	0.05%
100	1'285	0.00%	1'909	0.00%
<i>Zum Vergleich:</i>				
<i>Delta</i>	<i>1'024</i>	<i>-20.31%</i>	<i>1'441</i>	<i>-24.51%</i>
<i>Delta-Gamma</i>	<i>1'363</i>	<i>6.07%</i>	<i>2'128</i>	<i>11.47%</i>
<i>Wahrer VaR**</i>	<b>1'285</b>	-	<b>1'909</b>	-

\* %-Fehler: Prozentuale Abweichung vom wahren VaR

\*\* Full-MC-Simulationen mit 1 Mio. Szenarien

Grundsätzlich gilt: Je komplexer die G/V-Funktion ist, desto mehr Grid-Punkte werden für eine adäquate G/V-Approximation benötigt. Bei der Frage, wie viele Grid-Punkte verwendet werden sollen, spielt neben der angestrebten Genauigkeit der Approximation auch der damit verbundene Rechenaufwand eine wichtige Rolle. Leider besteht hier aber ein Zielkonflikt: Eine grosse Anzahl Grid-Punkte führt zwar zu einer genaueren Approximation, gleichzeitig jedoch zu einem zusätzlichen Rechenaufwand, da für jeden weiteren Knotenpunkt der zugehörige G/V-Wert ermittelt werden muss. Das führt aber bei einem hochdimensionalen Grid zu einem starken Anstieg des Rechenaufwands, wie Tabelle 3-5 zeigt.

Tabelle 3-5: Anzahl Berechnungen in Abhängigkeit der Anzahl Marktfaktoren und Grid-Punkte

Anzahl Marktfaktoren	Anzahl Grid-Punkte pro Marktfaktor		
	3	5	10
2	$3^2 = 9$	$5^2 = 25$	$10^2 = 100$
3	$3^3 = 27$	$5^3 = 125$	$10^3 = 1'000$
4	$3^4 = 81$	$5^4 = 625$	$10^4 = 10'000$
5	$3^5 = 243$	$5^5 = 3'125$	$10^5 = 100'000$
6	$3^6 = 729$	$5^6 = 15'625$	$10^6 = 1'000'000$

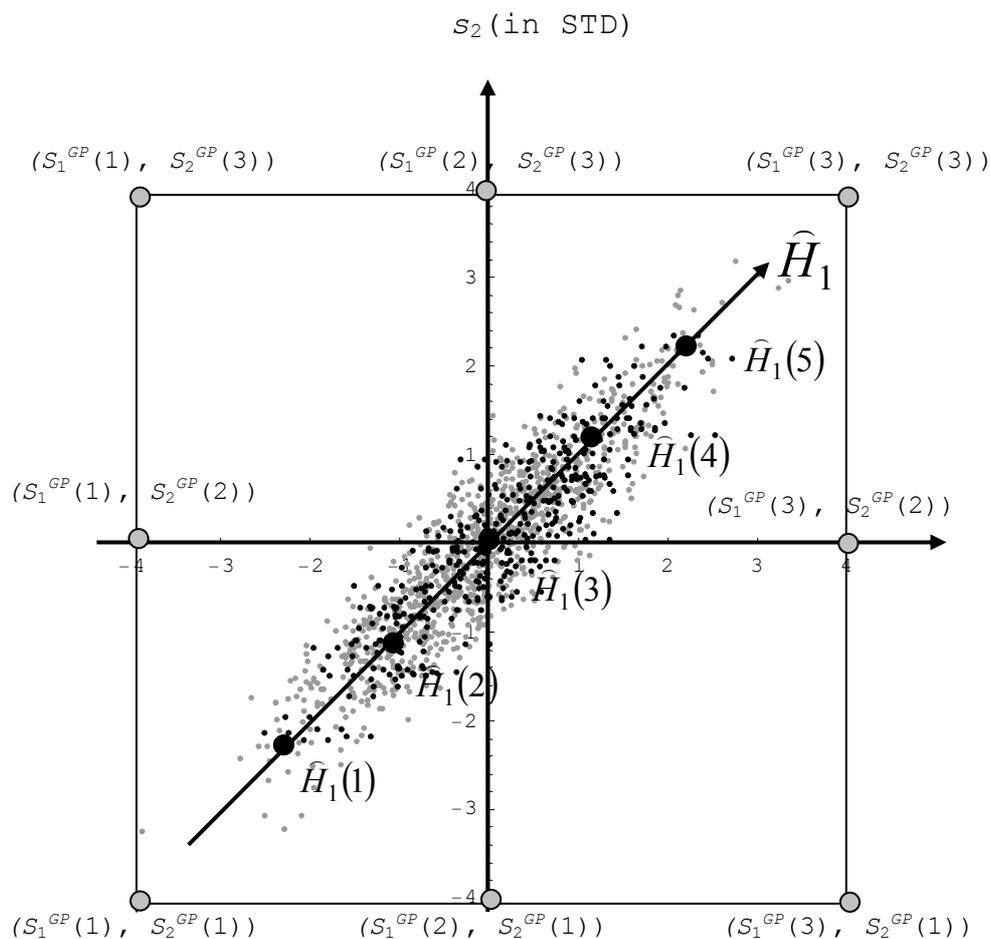
Aus obiger Tabelle ist auch zu erkennen, dass in erster Linie die Dimensionalität, also die Anzahl berücksichtigter Marktfaktoren bei der Grid-Approximation, den Rechenaufwand in die Höhe schnellen lässt. Jeder zusätzlich berücksichtigte Marktfaktor mit  $n$  Grid-Punkten erhöht den Rechenaufwand um das  $n$ -fache. Der Einsatz von Grid-Approximationen macht deshalb nur Sinn, solange die Dimensionalität der G/V-Funktion nicht allzu hoch ist. Deshalb muss mit einer zusätzlichen Technik versucht werden, die

Dimensionalität der Marktfaktoren geschickt zu reduzieren. Diesem Thema widmet sich der nächste Unterabschnitt.

### 3.4.7 PCA-Methode

Bevor die PCA-Methode formal dargestellt wird, sei zunächst nochmals an das Portfolio des letzten Abschnitts, das von zwei miteinander korrelierten Marktfaktoren abhängt, erinnert.<sup>56</sup>

Abbildung 3-13: Richtung des ersten PCA-Faktors



Betrachtet man den ursprünglichen Grid,<sup>57</sup> der zur Approximation der G/V-Funktion erstellt wurde, so fällt auf, dass gewisse Knotenpunkte des Grids fernab der Punktwolke liegen. Es werden also G/V-Werte für Marktzustände berechnet, deren Eintrittswahrscheinlichkeiten vernachlässigbar klein sind.<sup>58</sup> Schon von blossen Auge lässt sich erkennen, dass

<sup>56</sup> Vgl. Abbildung 3-6, S. 50

<sup>57</sup> In Abbildung 3-13, S. 59 durch das Gitter mit den dicken grauen Punkten dargestellt.

<sup>58</sup> Im Besonderen die Eckpunkte  $(S_1^{GP}(1), S_2^{GP}(3))$  sowie  $(S_1^{GP}(3), S_2^{GP}(1))$  besitzen äusserst geringe Eintrittswahrscheinlichkeiten.

es aus der Sicht des Rechenaufwands viel effizienter wäre, die G/V-Werte in der Umgebung der Punktwolke zu ermitteln. Besonders günstig wäre es, die G/V-Werte auf der Geraden bestimmen zu können, die durch das Zentrum und entlang der stärksten Ausdehnung der Punktwolke führt. Mit Hilfe der PCA-Methode lässt sich genau diese Gerade identifizieren.

Mit der PCA-Methode können insgesamt  $M$  PCA-Faktoren  $\hat{H}_1, \dots, \hat{H}_M$  gefunden werden. Die PCA-Faktoren sind Linearkombinationen der ursprünglichen Risikokomponenten. Der erste PCA-Faktor ist dabei so zusammengesetzt, dass er einen möglichst grossen Anteil der Gesamtvarianz der Risikokomponenten zu erklären vermag. Der zweite PCA-Faktor ist so konstruiert, dass er einerseits unabhängig vom ersten ist und andererseits den grösstmöglichen Anteil der Restvarianz erklärt. Alle weiteren PCA-Faktoren finden sich analog.

Mathematisch läuft die Ermittlung der PCA-Faktoren darauf hinaus, dass man das Eigenwertproblem<sup>59</sup> für die Kovarianz-, bzw. die Korrelationsmatrix der Risikokomponenten löst,<sup>60</sup> um mit den so gefundenen Eigenwerten und Eigenvektoren die PCA-Faktoren zu bestimmen.

### Standardisierung der Risikokomponenten

Die Einheiten, in denen die Risikokomponenten gemessen werden, sind oft arbiträr gewählt. Zum Beispiel kann die Veränderung einer Sptrate in Prozenten oder in Basispunkten gemessen werden. Bei der PCA-Methode hat die Wahl der Einheiten jedoch einen direkten Einfluss auf deren Resultate, da jene Risikokomponenten, die hohe Varianzen aufweisen, automatisch in den ersten PCA-Faktoren mehr Gewicht erhalten. Um diesen Effekt auszuschalten, werden die Risikokomponenten standardisiert.

Der  $(M \times 1)$ -Vektor  $\hat{\mathbf{S}}$  mit den standardisierten Risikokomponenten wird definiert als<sup>61</sup>

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{pmatrix} \hat{S}_1 \\ \vdots \\ \hat{S}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/\sigma_M \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_M \end{pmatrix}. \quad (3-25)$$

<sup>59</sup> Vgl. Bronstein et al. (1999), S. 278

<sup>60</sup> Vgl. Hamerle/Fahmeir (1984), S. 598

<sup>61</sup> Zur Standardisierung von stetigen Zufallsvariablen siehe Bosch (1998), S. 201

Für die Kovarianzmatrix von  $\hat{\mathbf{S}}$  gilt

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\hat{\mathbf{S}}) &= \text{Cov}(\text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_M) \cdot \mathbf{S}) \\
 &= \text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_M) \cdot \underbrace{\text{Cov}(\mathbf{S})}_{\underline{\Sigma}} \cdot \text{diag}(1/\sigma_1, \dots, 1/\sigma_M) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{1,1}}{\sigma_1 \cdot \sigma_1} & \dots & \frac{\sigma_{1,M}}{\sigma_1 \cdot \sigma_M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{M,1}}{\sigma_M \cdot \sigma_1} & \dots & \frac{\sigma_{M,M}}{\sigma_M \cdot \sigma_M} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \dots & \rho_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{M,1} & \dots & \rho_{M,M} \end{pmatrix} \\
 &= \underline{\underline{\mathfrak{R}}}
 \end{aligned}$$

### Abbildung des standardisierten Risikovektors mittels PCA-Faktoren

Der standardisierte Risikovektor mit der Verteilung<sup>62</sup>

$$\hat{\mathbf{S}} \sim N_M(\mathbf{0}, \underline{\underline{\mathfrak{R}}}), \quad (3-26)$$

kann nun mittels der PCA-Faktoren repliziert werden. Gemäss der vollständigen Hauptkomponentenzerlegung gilt nämlich<sup>63</sup>

$$\hat{\mathbf{S}} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{U}}}} \cdot \sqrt{\underline{\underline{\hat{\Lambda}}}} \cdot \underline{\underline{\hat{\mathbf{H}}}}. \quad (3-27)$$

Der  $(M \times 1)$ -Vektor  $\underline{\underline{\hat{\mathbf{H}}}} = (\hat{H}_1, \dots, \hat{H}_M)^T$  enthält die  $M$  PCA-Faktoren und ist im vorliegenden Fall wie  $\hat{\mathbf{S}}$  multivariat-normalverteilt<sup>64</sup>

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{H}}}} \sim N_M(\mathbf{0}, \underline{\underline{\mathbf{I}}}). \quad (3-28)$$

<sup>62</sup> Die PCA-Methode kann auch bei nicht-normalverteilten Risikokomponenten angewandt werden. Deren Verteilung muss aber achsensymmetrisch sein. Vgl. Loretan (1997), S. 25 f.

<sup>63</sup> Der Beweis findet sich im Anhang: 8.3.1 Beweis der Risikovektor-Abbildung durch PCA-Faktoren, S.185

<sup>64</sup> Ausführungen hierzu finden sich im Anhang: 8.3.1 Beweis der Risikovektor-Abbildung durch PCA-Faktoren, S.185

In der  $(M \times M)$ -Diagonalmatrix  $\underline{\underline{\hat{\Lambda}}}$  sind die reellen Eigenwerte der Korrelationsmatrix  $\underline{\underline{\mathfrak{R}}}$  ihrer Grösse nach in der Hauptdiagonalen angeordnet

$$\underline{\underline{\hat{\Lambda}}} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \hat{\lambda}_M \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_M. \quad (3-29)$$

Die  $(M \times M)$ -Matrix  $\underline{\underline{\hat{U}}}$  enthält die normierten Eigenvektoren, die entsprechend den Eigenwerten in den Spalten angeordnet sind. In der ersten Spalte  $\hat{u}_{\bullet,1}$  steht somit der zum ersten Eigenwert  $\hat{\lambda}_1$  gehörige Eigenvektor, in der zweiten Spalte  $\hat{u}_{\bullet,2}$  der zum zweiten Eigenwert  $\hat{\lambda}_2$  gehörige Eigenvektor usw.

$$\underline{\underline{\hat{U}}} = (\hat{u}_{\bullet,1}, \dots, \hat{u}_{\bullet,M}) = \begin{pmatrix} \hat{u}_{1,1} & \cdots & \hat{u}_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{u}_{M,1} & \cdots & \hat{u}_{M,M} \end{pmatrix}. \quad (3-30)$$

Es gilt:

$$\underline{\underline{\hat{U}}}^T \cdot \underline{\underline{\hat{U}}} = \underline{\underline{\mathbf{I}}}. \quad (3-31)$$

Der standardisierte Risikovektor  $\hat{\mathbf{S}}$  kann demnach als Linearkombination der PCA-Faktoren dargestellt werden

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{H}_1 \cdot \sqrt{\hat{\lambda}_1} \cdot \hat{u}_{\bullet,1} + \hat{H}_2 \cdot \sqrt{\hat{\lambda}_2} \cdot \hat{u}_{\bullet,2} + \dots + \hat{H}_M \cdot \sqrt{\hat{\lambda}_M} \cdot \hat{u}_{\bullet,M}. \quad (3-32)$$

### Reduktion der Faktordimensionalität

Der erste PCA-Faktor ist so konstruiert, dass er den grössten Teil der Variabilität in der Dynamik der Risikokomponenten zu erklären vermag. Jeder weitere PCA-Faktor erklärt einen immer kleineren Varianzanteil. Deshalb kann versucht werden,  $\hat{\mathbf{S}}$  nur mit den ersten  $N^{PCA}$  PCA-Faktoren nachzubilden<sup>65</sup>

$$\hat{\mathbf{S}} \approx \hat{\mathbf{S}}^{PCA(N^{PCA})} = \hat{H}_1 \cdot \sqrt{\hat{\lambda}_1} \cdot \hat{u}_{\bullet,1} + \hat{H}_2 \cdot \sqrt{\hat{\lambda}_2} \cdot \hat{u}_{\bullet,2} \dots \hat{H}_{N^{PCA}} \cdot \sqrt{\hat{\lambda}_{N^{PCA}}} \cdot \hat{u}_{\bullet,N^{PCA}}. \quad (3-33)$$

<sup>65</sup> Vgl. Fahrmeir/Hamerle (1984), S. 601

Die Varianz von  $\widehat{\mathbf{S}}^{PCA(N^{PCA})}$  beträgt<sup>66,67</sup>

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(\widehat{\mathbf{S}}^{PCA(N^{PCA})}\right) &= E\left\|\widehat{\mathbf{S}}^{PCA(N^{PCA})}\right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N^{PCA}} \widehat{\lambda}_i \cdot \underbrace{E\left(\widehat{H}_i^2\right)}_{=1} \cdot \underbrace{\widehat{\mathbf{u}}_{\bullet,i}^T \cdot \widehat{\mathbf{u}}_{\bullet,i}}_{=1} = \sum_{i=1}^{N^{PCA}} \widehat{\lambda}_i. \end{aligned} \quad (3-34)$$

Da die Gesamtvarianz von  $\widehat{\mathbf{S}}$ <sup>68</sup>

$$\text{Var}\left(\widehat{\mathbf{S}}^{PCA(M)}\right) = \text{Var}\left(\widehat{\mathbf{S}}\right) = \sum_{i=1}^M \widehat{\lambda}_i = M \quad (3-35)$$

ist, liegt der prozentuale Anteil der Gesamtvarianz, der durch die ersten  $N^{PCA}$  PCA-Faktoren,  $\widehat{H}_i$ ,  $i = 1, \dots, N^{PCA}$ , beschrieben wird, bei<sup>69</sup>

$$\frac{\text{Var}\left(\widehat{\mathbf{S}}^{PCA(N^{PCA})}\right)}{\text{Var}\left(\widehat{\mathbf{S}}\right)} = \frac{\sum_{i=1}^{N^{PCA}} \widehat{\lambda}_i}{M}. \quad (3-36)$$

### Abbildung des ursprünglichen Risikovektors mittels PCA-Faktoren

Gleichermassen kann der ursprüngliche (nicht-standardisierte) Risikovektor  $\mathbf{S}$  durch die PCA-Faktoren approximativ nachgebildet werden.

Betrachtet man hierzu die Gleichungen (3-25) und (3-33), so folgt

$$\mathbf{S} \approx \mathbf{S}^{PCA(N^{PCA})}, \quad (3-37)$$

<sup>66</sup> Mit  $\|\cdot\|$  wird die Euklidische Norm bezeichnet. Vgl. Bronstein et al., S. 257

<sup>67</sup> Vgl. Kreinin et al. (1998), S. 23

<sup>68</sup> Wird die PCA-Methode an den (nicht-standardisierten) Marktfaktoren durchgeführt, also anhand der Kovarianzmatrix  $\underline{\Sigma}$ , so gilt:  $\sum_{i=1}^M \widehat{\lambda}_i = \sum_{i=1}^M \sigma_i^2$

<sup>69</sup> Vgl. Fahrmeir/Hamerle (1984), S. 602

wobei der  $(M \times 1)$ -Vektor  $\mathbf{S}^{PCA(N^{PCA})}$  den durch die ersten  $N^{PCA}$  PCA-Faktoren approximierten Risikovektor bezeichnet

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{PCA(N^{PCA})} &= \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_M) \cdot \widehat{\mathbf{S}}^{PCA(N^{PCA})} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdot (\widehat{H}_1 \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_1} \cdot \widehat{u}_{1,1} + \widehat{H}_2 \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_2} \cdot \widehat{u}_{1,2} \dots \widehat{H}_{N^{PCA}} \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_{N^{PCA}}} \cdot \widehat{u}_{1,N^{PCA}}) \\ \vdots \\ \sigma_M \cdot (\widehat{H}_1 \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_1} \cdot \widehat{u}_{M,1} + \widehat{H}_2 \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_2} \cdot \widehat{u}_{M,2} \dots \widehat{H}_{N^{PCA}} \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_{N^{PCA}}} \cdot \widehat{u}_{M,N^{PCA}}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3-38)$$

### PCA-Ladungsmatrix

Zur Vereinfachung der Notation sei die  $(M \times N^{PCA})$ -Matrix  $\widehat{\underline{\underline{\boldsymbol{\beta}}}}^{PCA(N^{PCA})}$  definiert. Sie wird als PCA-Ladungsmatrix bezeichnet und enthält die Faktorladungen von  $\widehat{H}_i, i = 1, \dots, N^{PCA}$ :

$$\begin{aligned} \widehat{\underline{\underline{\boldsymbol{\beta}}}}^{PCA(N^{PCA})} &= \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_{1,1} & \dots & \widehat{\beta}_{1,N^{PCA}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{\beta}_{M,1} & \dots & \widehat{\beta}_{M,N^{PCA}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_1 \cdot \widehat{u}_{1,1} \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_1} & \dots & \sigma_1 \cdot \widehat{u}_{1,N^{PCA}} \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_{N^{PCA}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_M \cdot \widehat{u}_{M,1} \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_1} & \dots & \sigma_M \cdot \widehat{u}_{M,N^{PCA}} \cdot \sqrt{\widehat{\lambda}_{N^{PCA}}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3-39)$$

### PCA-Vektor

Ebenso sei der  $(N^{PCA} \times 1)$ -Vektor  $\widehat{\mathbf{H}}^{PCA(N^{PCA})}$  eingeführt. Er wird PCA-Vektor genannt und enthält die ersten  $N^{PCA}$  PCA-Faktoren

$$\widehat{\mathbf{H}}^{PCA(N^{PCA})} = \begin{pmatrix} \widehat{H}_1 \\ \vdots \\ \widehat{H}_{N^{PCA}} \end{pmatrix}. \quad (3-40)$$

Aufgrund der neu definierten Elemente lässt sich  $\mathbf{S}^{PCA(N^{PCA})}$  in eine kompakte Form bringen

$$\mathbf{S}^{PCA(N^{PCA})} = \underline{\hat{\boldsymbol{\beta}}}^{PCA(N^{PCA})} \cdot \underline{\hat{\mathbf{H}}}^{PCA(N^{PCA})}. \quad (3-41)$$

### Optimale Anzahl der PCA-Faktoren

Da sich mittels der PCA-Methode die wichtigsten Faktoren der Marktfaktordynamik ermitteln lassen, kann die Dimensionalität der Marktfaktoren stark eingeschränkt werden. Somit wird erst durch die PCA-Methode der effiziente Einsatz von Grid-Approximationen ermöglicht. Diese können nämlich den Rechenaufwand nur mindern, wenn die Dimensionalität der G/V-Funktion gering genug ist.<sup>70</sup>

Eine allgemeine Empfehlung, wie viele PCA-Faktoren bei der Grid-Approximation berücksichtigt werden sollen, kann nicht abgegeben werden. Die optimale Anzahl hängt u.a. davon ab, wie stark die zu Grunde liegenden Marktfaktoren miteinander korreliert sind.<sup>71</sup>

Besonders gut dokumentiert ist die Anwendung der PCA-Methode zur Beschreibung der Zinsstrukturdynamik. Littermann/Scheinkmann (1991) untersuchten z.B. die Dynamik der USD-Zinsstruktur und stellten fest, dass die ersten drei PCA-Faktoren einen Grossteil der Zinsbewegungen erklären können. Der erste PCA-Faktor (Level-Faktor) verschiebt die Zinskurve parallel nach oben und unten, der zweite PCA-Faktor (Steepness-Faktor) verändert die Steigung und der dritte PCA-Faktor (Curvature-Faktor) die Krümmung der Zinskurve.

Tabelle 3-6: Typische PCA-Zinskurvenbewegungen

<i>Laufzeit der Spotrates</i>	<i>Kurz</i>	<i>Mittel</i>	<i>Lang</i>
Level-Faktor	↕	↕	↕
Steepness-Faktor	↑/↓	-	↓/↑
Curvature-Faktor	↑/↓	↓/↑	↑/↓

<sup>70</sup> Vgl. die Ausführungen hierzu unter 6.2.4 Methodenspezifischer Rechenaufwand der PCA-Grid-Methode, S. 165

<sup>71</sup> Loretan (1997) zeigt in seiner Arbeit, dass z.B. die Dynamik von Aktienindizes neun verschiedener Industrieländer mit zwei bis vier PCA-Faktoren grösstenteils beschrieben werden kann. Gleiches stellt er für Wechselkurse und langfristige Zinssätze fest. Wenn aber die gemeinsame Dynamik von Marktfaktoren unterschiedlicher Art (z.B. Aktien und Wechselkurse oder Aktien und Zinssätze) beschrieben werden soll, deren Korrelationen nicht mehr so ausgeprägt sind, so ist die PCA-Methode in Bezug auf die Reduktion der Dimensionalität nicht mehr so effizient.

Obwohl nicht alle empirischen Untersuchungen diese Zuordnung bestätigen,<sup>72</sup> herrscht doch Einigkeit darüber, dass in der Regel drei PCA-Faktoren genügen um die Dynamik der Zinskurve grösstenteils abzubilden. Die Tabelle 3-7 enthält eine Übersicht der entsprechenden empirischen Untersuchungen.

Tabelle 3-7: Anwendung der PCA-Methode zur Beschreibung der Zinsstrukturdynamik

Zinskurve	Autor (en)
CAN	Hill/Vaysman (1998)
CHF/DEM	Bühler/Zimmermann (1996) Staub (1996)
GBP	Steely (1990)
JPY	Hiraki/Shiraishi/Takezawa (1996)
USD	Kahn (1989) Littermann/Scheinkmann (1991) Zhang (1993)
Verschiedene Währungen	Murphy/Won/Gulrajana (1995) Rodrigues (1997) Loretan (1997)

### 3.4.8 Kombination der Grid-Approximation und der PCA-Methode

In diesem Abschnitt werden nun die beiden Techniken, die PCA-Methode und die Grid-Approximation, zusammengeführt, um die G/V-Funktion von Portfolios zu approximieren.

Wie in Abschnitt 3.4.1 gezeigt, kann die G/V-Funktion durch eine Grid-Approximation auf Basis der Risikokomponenten abgebildet werden

$$\Delta P^{Grid}(S_1, \dots, S_M) = \Delta P + A^{Grid}. \quad (3-42)$$

Ebenfalls wurde gezeigt, dass der Grid-Approximationsfehler  $A^{Grid}$  primär von der Anzahl der Grid-Punkte abhängig ist.<sup>73</sup>

Gemäss Abschnitt 3.4.7 kann die Dynamik der  $M$  Risikokomponenten  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  aber auch approximativ durch die ersten  $N^{PCA}$  PCA-Faktoren  $\hat{H}_i$ ,  $i = 1, \dots, N^{PCA}$  beschrieben

<sup>72</sup> Der erste PCA-Faktor beschreibt nicht in allen Fällen eine parallele Zinsveränderung. Vgl. Bühler/Zimmermann, (1996), S. 61

<sup>73</sup> Vgl. 3.4.6 Grid-Approximationsfehler, S. 54

werden, wobei  $N^{PCA} \leq M$ . Wird der Grid nicht bezüglich der Risikokomponenten, sondern bezüglich der PCA-Faktoren errichtet, so resultiert die *PCA-Grid-G/V-Funktion*

$$\Delta P^{PCA-Grid}(N^{PCA}) = \Delta P^{Grid}(\hat{H}_1, \dots, \hat{H}_{N^{PCA}}). \quad (3-43)$$

Die approximierte G/V-Funktion  $\Delta P^{PCA-Grid}$  verknüpft also die Grid-Approximation mit der PCA-Methode. Der daraus resultierende Approximationsfehler

$$A^{PCA-Grid} = \Delta P^{PCA-Grid} - \Delta P, \quad (3-44)$$

besitzt nun aber zwei unterschiedliche Fehlerquellen. Einerseits entstehen Approximationsfehler, indem die G/V-Funktion durch einen zu groben Grid abgebildet wird, und andererseits dadurch, dass die ausgewählten PCA-Faktoren nicht die für das Portfolio risikorelevanten Marktfaktorbewegungen beschreiben. Die zweite Fehlerquelle ist zentral und bedarf einer genaueren Erläuterung.

Viele empirische Untersuchungen weisen darauf hin, dass oftmals wenige PCA-Faktoren genügen, um die gemeinsamen Bewegungen der Marktfaktoren zu beschreiben.<sup>74</sup> Bei der Messung des Marktrisikos eines Portfolios muss die Frage aber in erster Linie lauten: "Welche Marktfaktorbewegungen führen zu den grössten Portfolioverlusten?".

Wie das folgende Anwendungsbeispiel illustriert, entsprechen die PCA-Faktoren, welche die relevanten Faktoren bezüglich der Marktfaktordynamik darstellen, nicht automatisch den aus der Sicht des Portfolios risikorelevanten Marktfaktorbewegungen.

### 3.4.9 Anwendungsbeispiel: Steepness-Bondportfolio

Ziel dieses Anwendungsbeispiels ist es, einerseits die PCA-Methode an einem konkreten Fall aufzuzeigen und andererseits auf die mit der PCA-Grid-Methode verbundenen Probleme hinzuweisen. Zu diesem Zweck wird ein Portfolio betrachtet, welches durch eine besondere Long- und Short-Bondposition hauptsächlich auf eine Drehbewegung (Steepness-Faktor) der Zinskurve reagiert.<sup>75</sup> Sämtliches Zahlenmaterial zu diesem Beispiel findet sich im Anhang.<sup>76</sup>

<sup>74</sup> Vgl. Tabelle 3-7: Anwendung der PCA-Methode zur Beschreibung der Zinsstrukturdynamik, S. 66

<sup>75</sup> Vgl. Tabelle 3-9: Zusammensetzung des Steepness-Bondportfolios

<sup>76</sup> Vgl. 8.7 Zahlenmaterial für das Anwendungsbeispiel: Steepness-Bondportfolio, S. 188

Das Beispiel ist so aufgebaut, dass zunächst gezeigt wird, wie die Dynamik einer Zinskurve mit wenigen PCA-Faktoren beschrieben werden kann. Anschliessend wird die Preisreaktion des Steepness-Bondportfolios auf unterschiedliche Zinskurvenbewegungen gemessen, wobei festgestellt wird, ob die risikoreichste Zinsbewegung aus Sicht des Bondportfolios auch tatsächlich durch den ersten PCA-Faktor beschrieben wird.

### Modellierung der Zinskurvendynamik mit Hilfe von PCA-Faktoren

Im Folgenden wird eine Zinskurve zum Ende einer eintägigen Haltedauer  $T$  modelliert. Ausgangslage bildet die erwartete Zinskurve, die durch den  $(10 \times 1)$ -Vektor  $\bar{\mathbf{X}} = E(\mathbf{X})$  beschrieben ist. Als Elemente enthält  $\bar{\mathbf{X}}$  die erwarteten Spotrates der unterschiedlichen Fristigkeiten  $\bar{X}_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$ , mit denen die Zinskurve im Modell abgebildet wird (Vgl. Tabelle 3-8).<sup>77</sup>

Tabelle 3-8: Erwartete Zinskurve zum Zeitpunkt  $T$

Erwartete Spotrates	$\bar{X}_1$	$\bar{X}_2$	$\bar{X}_3$	$\bar{X}_4$	$\bar{X}_5$	$\bar{X}_6$	$\bar{X}_7$	$\bar{X}_8$	$\bar{X}_9$	$\bar{X}_{10}$
Laufzeit	1M	3M	6M	1J	2J	3J	4J	5J	7J	10J
Zins (in %)	4.30	4.23	4.19	4.22	4.83	5.47	5.98	6.44	6.95	7.34

M: Monat; J: Jahr

Um dem Modell eine zufällige Dynamik zu verleihen, wird der  $(10 \times 1)$ -Risikovektor  $\mathbf{S}$  eingeführt, der die Risikokomponenten der Spotrates

$$S_i = X_i - \bar{X}_i, \quad i = 1, \dots, 10, \quad (3-45)$$

als Elemente enthält. Wiederum wird unterstellt, dass dieser multivariat-normalverteilt sei

$$\mathbf{S} \sim N_{10}(\mathbf{0}, \underline{\underline{\Sigma}}). \quad (3-46)$$

Die Kovarianzmatrix beträgt

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{10}) \cdot \underline{\underline{\mathfrak{R}}} \cdot \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{10}), \quad (3-47)$$

<sup>77</sup> Datengrundlage bildet die USD-Zinskurve vom 1. Januar 1992.

wobei die Werte der Volatilitäten<sup>78</sup> und Korrelationen lauten

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \vdots \\ \sigma_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 \text{ Bp} \\ 4.5 \text{ Bp} \\ \vdots \\ 4.5 \text{ Bp} \end{pmatrix}, \text{ bzw. } \underline{\underline{\mathfrak{R}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0.701 & \dots & 0.138 \\ 0.701 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0.138 & & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (3-48)$$

Um nun die Bewegungen der Zinsstruktur, die ursprünglich durch den zehndimensionalen Zufallsvektor abgebildet wird

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S}, \quad (3-49)$$

mit einem Vektor geringerer Dimensionalität zu beschreiben, wird die PCA-Methode angewandt.

Zuerst werden die PCA-Faktoren ermittelt, indem das Eigenwertproblem für die Korrelationsmatrix  $\underline{\underline{\mathfrak{R}}}$  gelöst wird. Die berechneten Eigenwerte sind, nach Grösse geordnet ( $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots > \hat{\lambda}_{10}$ ), in der Diagonalmatrix  $\underline{\underline{\hat{\Lambda}}}$  zusammengefasst

$$\underline{\underline{\hat{\Lambda}}} = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 & & & & \\ & \hat{\lambda}_2 & & & \\ & & \hat{\lambda}_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \hat{\lambda}_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.841 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2.709 & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & 0.479 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & \dots & 0.019 \end{pmatrix}. \quad (3-50)$$

---

<sup>78</sup> Volatilität der absoluten täglichen Veränderungen der Zinsen

Die entsprechenden Eigenvektoren  $\hat{\mathbf{u}}_{\bullet,i}$ ,  $i = 1, \dots, 10$ , sind in der orthogonalen Matrix  $\hat{\mathbf{U}}$  spaltenweise angeordnet<sup>79</sup>

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{U}} &= \begin{pmatrix} \hat{u}_{1,1} & \hat{u}_{1,2} & \hat{u}_{1,3} & \cdots & \hat{u}_{1,10} \\ \hat{u}_{2,1} & \hat{u}_{2,2} & \hat{u}_{2,3} & \cdots & \hat{u}_{2,10} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{u}_{10,1} & \hat{u}_{10,2} & \hat{u}_{10,3} & \cdots & \hat{u}_{10,10} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.170 & 0.433 & 0.313 & \cdots & 0.002 \\ 0.217 & 0.472 & -0.082 & \cdots & -0.027 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.335 & -0.186 & 0.621 & \cdots & 0.013 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3-51)$$

Im Weiteren wird analysiert, wie viele PCA-Faktoren zur angemessenen Beschreibung der Zinskurve notwendig sind. Im vorliegenden Beispiel erklären die ersten drei PCA-Faktoren einen prozentualen Anteil der Gesamtvarianz von<sup>80</sup>

$$\frac{\sum_{i=1}^3 \lambda_i}{M} = \frac{5.841 + 2.709 + 0.479}{10} \approx 90.3\%. \quad (3-52)$$

Da mit den ersten drei PCA-Faktoren 90.3% der Marktfaktordynamik erklärt werden kann, soll die ursprüngliche zehndimensionale Zinskurvendynamik im Folgenden nur noch durch den dreidimensionalen PCA-Vektor  $\hat{\mathbf{H}}^{PCA(3)}$ , der die ersten drei PCA-Faktoren  $\hat{H}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  als Elemente enthält, approximativ beschrieben werden

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S} \approx \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S}^{PCA(3)} = \bar{\mathbf{X}} + \hat{\underline{\boldsymbol{\beta}}}^{PCA(3)} \cdot \hat{\mathbf{H}}^{PCA(3)}. \quad (3-53)$$

Die Verteilung des PCA-Vektors beträgt

$$\hat{\mathbf{H}}^{PCA(3)} \sim N_3(\mathbf{0}, \underline{\mathbf{I}}). \quad (3-54)$$

<sup>79</sup> Die nicht aufgeführten Werte sind in der Tabelle 8-4: Eigenwerte der Korrelationsmatrix, S. 189, enthalten.

<sup>80</sup> Vgl. Gleichung (3-36), S. 63

Für die PCA-Ladungsmatrix  $\hat{\beta}^{PCA(3)}$  ergeben sich gemäss Gleichung (3–39) die Werte

$$\hat{\beta}^{PCA(3)} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{1,1} & \hat{\beta}_{1,2} & \hat{\beta}_{1,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{\beta}_{10,1} & \hat{\beta}_{10,2} & \hat{\beta}_{10,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0267\% & 0.0464\% & 0.0141\% \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0.0365\% & -0.0138\% & 0.0193\% \end{pmatrix}. \quad (3-55)$$

Somit resultiert eine von drei PCA-Faktoren  $\hat{H}_i$ ,  $i = 1,2,3$  abhängige Zinskurvenfunktion

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{10} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.30\% \\ \vdots \\ 7.34\% \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0267\% \cdot \hat{H}_1 + 0.0464\% \cdot \hat{H}_2 + 0.0141\% \cdot \hat{H}_3 \\ \vdots \\ 0.0365\% \cdot \hat{H}_1 - 0.0138\% \cdot \hat{H}_2 + 0.0193\% \cdot \hat{H}_3 \end{pmatrix}. \quad (3-56)$$

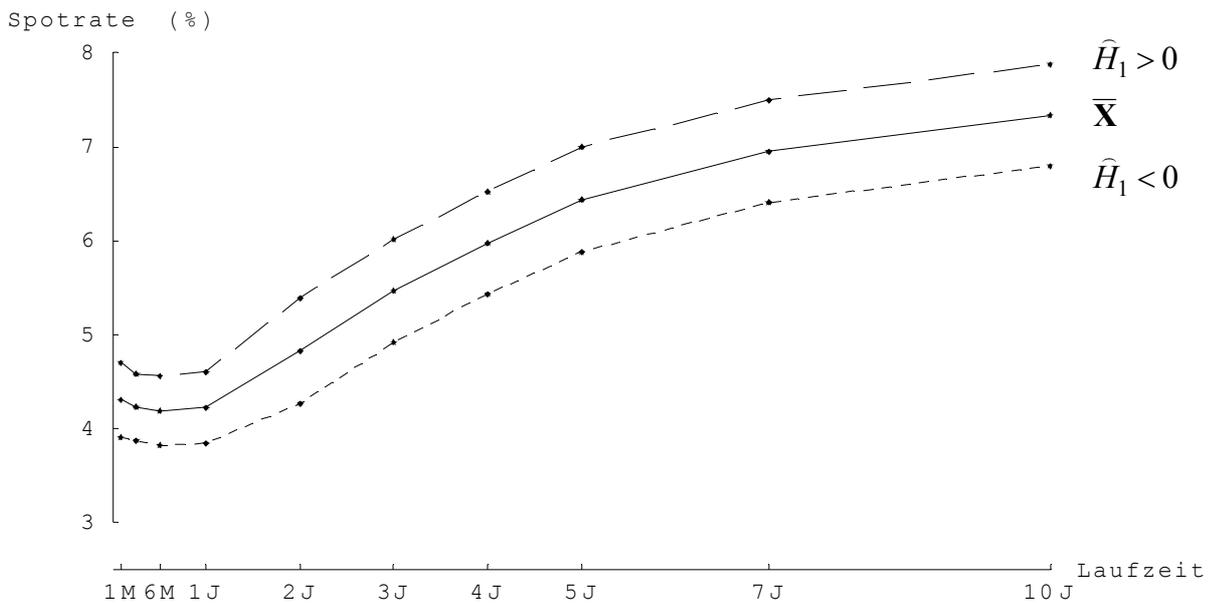
### Zinskurvenbewegungen

Die nun folgenden Abbildungen stellen die Zinskurvenbewegungen, welche durch die ersten drei PCA-Faktoren beschrieben werden, dar. In jeder Abbildung wird jeweils nur ein PCA-Faktor variabel gehalten (die Werte der übrigen beiden PCA-Faktoren sind konstant Null), um festzustellen, welche Zinskurvenbewegung durch diesen Faktor beschrieben wird. Als Ausgangslage dient die erwartete Zinskurve  $\bar{X}$ , bei der die Werte sämtlicher PCA-Faktoren Null betragen.

#### Zinskurvenbewegung des ersten PCA-Faktors

Die erste Abbildung 3-14 stellt die Bewegung der Zinskurve dar, die durch Veränderung des ersten PCA-Faktors  $\hat{H}_1$  hervorgerufen wird. Bei einem positiven ersten PCA-Faktor ( $\hat{H}_1 > 0$ ) verschiebt sich die Zinskurve mehr oder weniger parallel nach oben. Bei einem negativen PCA-Faktor ( $\hat{H}_1 < 0$ ) verschiebt sich die Zinskurve parallel nach unten. Somit beschreibt der erste PCA-Faktor im vorliegenden Fall eine Parallel-Verschiebung der Zinskurve (Level-Faktor).

Abbildung 3-14: Zinskurvenbewegung in Abhängigkeit des ersten PCA-Faktors

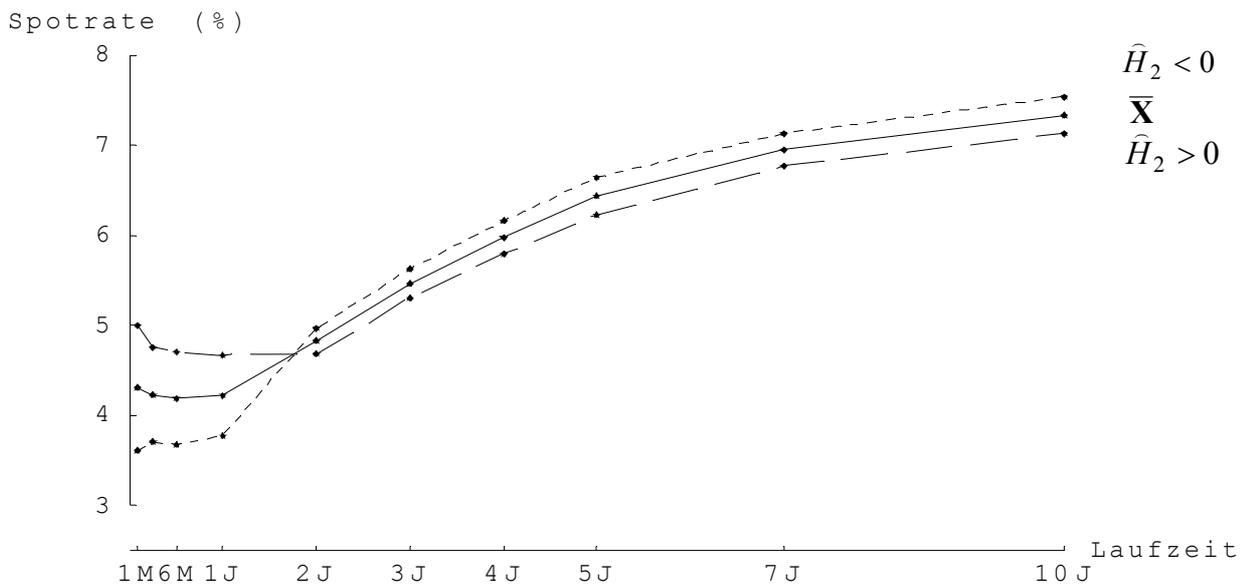


### Zinskurvenbewegung des zweiten PCA-Faktors

Wie die zweite Abbildung 3-15 verdeutlicht, beschreibt der zweite PCA-Faktor eine Art Drehung der Zinskurve, indem er die gegenläufige Bewegung der kurz- und langfristigen Spotrates abbildet. In der Literatur wird er, wie erwähnt, als Steepness-Faktor bezeichnet. Ein positiver Wert des zweiten PCA-Faktors ( $\hat{H}_2 > 0$ ) bewegt die Kurve am kurzen Ende nach oben und am langen Ende nach unten, wie anhand der Faktorladungen überprüft werden kann. So weist die Ein-Monats-Spotrate  $X_1$  eine positive Faktorladung ( $\hat{\beta}_{1,2} = 0.0464\%$ ) gegenüber dem zweiten PCA-Faktor  $\hat{H}_2$  auf, während die Zehn-Jahres-Spotrate  $X_{10}$  eine negative Faktorladung besitzt ( $\hat{\beta}_{10,2} = -0.0138\%$ ).<sup>81</sup>

<sup>81</sup> Vgl. Gleichung (3-56), S. 71

Abbildung 3-15: Zinskurvenbewegung in Abhängigkeit des zweiten PCA-Faktors

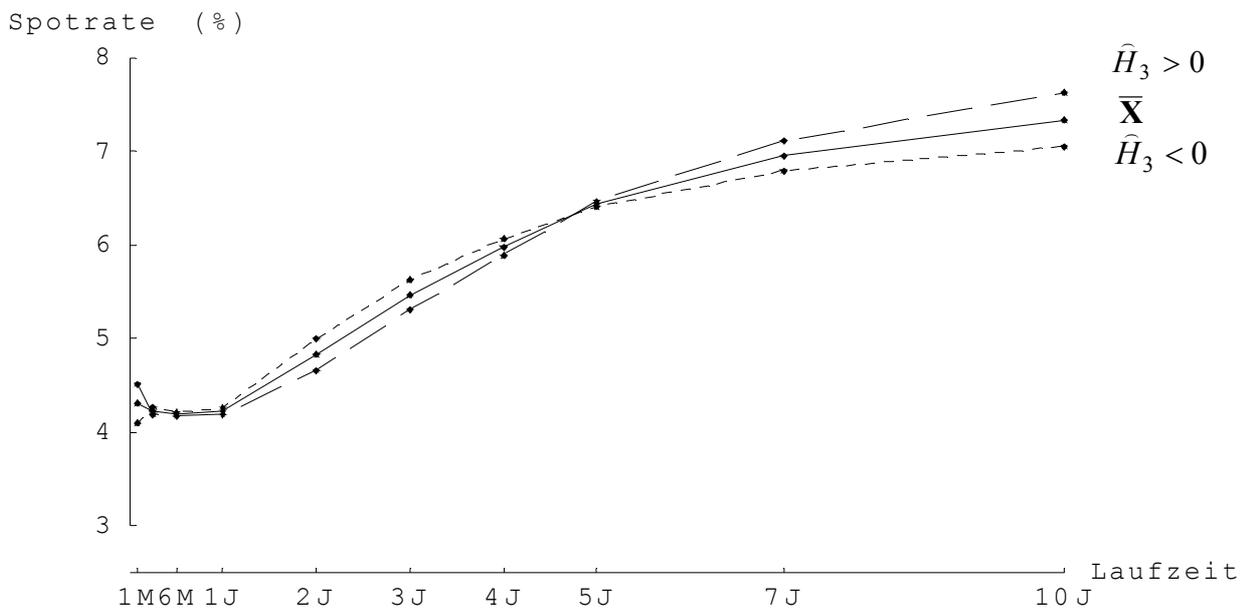


### Zinskurvenbewegung des dritten PCA-Faktors

In der Abbildung 3-16 wird die Bewegung des dritten PCA-Faktors dargestellt. Diese ist bei der vorliegenden Zinskurve recht speziell. Ein positiver dritter PCA-Faktor ( $\hat{H}_3 > 0$ ) erhöht die Ein-Monats-Spotrate ( $X_1$ ) sowie die Sieben- ( $X_9$ ) und Zehn-Jahres-Spotrate ( $X_{10}$ ), während alle übrigen Spotrates sinken.<sup>82</sup> In der Literatur wird der dritte PCA-Faktor deshalb als Curvature-Faktor bezeichnet, da er die Krümmung der Zinskurve verändert.

<sup>82</sup> Vgl. die entsprechenden Faktorladungen in Gleichung (3-56), S. 71

Abbildung 3-16: Zinskurvenbewegung in Abhängigkeit der Zustände des dritten PCA-Faktors



### Relevanz der PCA-Faktoren für die Risikoeinschätzung des Steepness-Bondportfolios

Wie obige Illustrierungen gezeigt haben, beschreiben die PCA-Faktoren unterschiedliche Zinskurvenbewegungen. Im Weiteren wird anhand des Steepness-Bondportfolios (vgl. Tabelle 3-9) getestet, ob die Prioritätenordnung der PCA-Faktoren in Bezug auf die Bestimmung des Verlustpotenzials richtig ist.

Tabelle 3-9: Zusammensetzung des Steepness-Bondportfolios

Instrument	Position	Nominalbetrag (in GE)	Laufzeit <sup>83</sup>
Zerobond A	Long	$NW_A = 100$ Mio.	$LZ_A = 1/12$ Jahre
Zerobond B	Short	$NW_B = 2$ Mio.	$LZ_B = 10$ Jahre

Der geplante Barwert des Bondportfolios zum Zeitpunkt  $T$  berechnet sich mit

$$P^{Plan} = NW_A \cdot \exp(-LZ_A \cdot \bar{X}_1) - NW_B \cdot \exp(-LZ_B \cdot \bar{X}_{10}). \quad (3-57)$$

<sup>83</sup> Die Laufzeit der Zerobonds bezieht sich dabei auf den Zeitpunkt  $T$  (Ende der Halteperiode).

Dabei entsprechen die beiden erwarteten Spotrates  $\bar{X}_1$  und  $\bar{X}_{10}$  den laufzeitgerechten Spotrates, die bei der Barwertfunktion zur Abdiskontierung der zukünftigen Zahlungsströme angewandt werden müssen. Nach Einsetzen der Werte erhält man den geplanten Portfoliowert von

$$P^{Plan} = 100 \text{ Mio.} \cdot \exp\left(-\frac{1}{12} \cdot 4.30\%\right) - 2 \text{ Mio.} \cdot \exp(-10 \cdot 7.34\%) = 98.68 \text{ Mio.} \quad (3-58)$$

Nun wird überprüft, ob der erste PCA-Faktor  $\hat{H}_1$ , der gemäss obigen Berechnungen 58.41% der Gesamtvarianz der Spotrates erklärt,<sup>84</sup> auch aus der Sicht des Portfolios der risikoreichste Faktor ist. Hierzu wird zunächst die G/V-Funktion des Bondportfolios in Abhängigkeit der ersten drei PCA-Faktoren umformuliert<sup>85</sup>

$$\begin{aligned} \Delta P &= P(\mathbf{X}) - P^{Plan} \\ &= P(\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S}) - P^{Plan} \\ &\approx P(\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S}^{PCA(3)}) - P^{Plan} \\ &= NW_A \cdot \exp(-LZ_A \cdot (\bar{X}_1 + S_1^{PCA(3)})) - NW_B \cdot \exp(-LZ_B \cdot (\bar{X}_{10} + S_{10}^{PCA(3)})) - P^{Plan} \\ &= NW_A \cdot \exp(-LZ_A \cdot (\bar{X}_1 + \hat{\beta}_{1,1} \cdot \hat{H}_1 + \hat{\beta}_{1,2} \cdot \hat{H}_2 + \hat{\beta}_{1,3} \cdot \hat{H}_3)) \\ &\quad - NW_B \cdot \exp(-LZ_B \cdot (\bar{X}_{10} + \hat{\beta}_{10,1} \cdot \hat{H}_1 + \hat{\beta}_{10,2} \cdot \hat{H}_2 + \hat{\beta}_{10,3} \cdot \hat{H}_3)) - P^{Plan} \end{aligned} \quad (3-59)$$

Der Reihe nach werden die PCA-Faktoren um plus, bzw. minus eine Standardabweichung vergrössert, bzw. verkleinert, wobei die Werte der nicht betroffenen PCA-Faktoren konstant auf Null gehalten werden. In der Tabelle 3-10 sind die Ergebnisse dargestellt.

<sup>84</sup> Vgl. entsprechender Wert in der Gleichung (3-52), S. 70

<sup>85</sup> Unter Vernachlässigung des Zeitfaktors. Es handelt sich somit um die Portfoliowertänderung bei einem sofortigen PCA-Faktor-Schock.

Tabelle 3-10: G/V-Werte aufgrund ausgewählter PCA-Faktorschocks

Simulierter PCA-Faktor	Zustand der PCA-Faktoren*			1-Monats- Spotrate: $X_1$	10-Jahres- Spotrate: $X_{10}$	Gewinn/Verlust $\Delta P$ (in GE)
	$\hat{H}_1$	$\hat{H}_2$	$\hat{H}_3$			
Ausgangslage	0	0	0	4.3000%	7.3400%	0
Erster $\hat{H}_1$	1	0	0	4.3267%	7.3764%	1274
	-1	0	0	4.2733%	7.3036%	-1286
Zweiter $\hat{H}_2$	0	1	0	4.3463%	7.3262%	-5170
	0	-1	0	4.2537%	7.3538%	5168
Dritter $\hat{H}_3$	0	0	1	4.3141%	7.3593%	686
	0	0	-1	4.2859%	7.3207%	-689

\* Der Wert 1 entspricht genau der Volatilität der standardnormalverteilten PCA-Faktoren.

Tabelle 3-10 zeigt, dass das Marktrisiko des Steepness-Bondportfolios nicht primär vom ersten PCA-Faktor, sondern hauptsächlich vom zweiten PCA-Faktor abhängt. Zwar führt eine Parallelverschiebung (erster PCA-Faktor) der Zinskurve nach oben oder unten auch zu Gewinnen bzw. Verlusten, doch in besonderem Masse ist das Portfolio aufgrund seiner Long/Short-Konstruktion einer Steigungsveränderung der Zinskurve ausgesetzt, die im vorliegenden Beispiel durch den zweiten PCA-Faktor (Steepness-Faktor) beschrieben wird. Das Portfolio reagiert denn auch um etwa das Vierfache stärker auf Drehbewegungen als auf Parallelverschiebungen.

Das Beispiel zeigt eindrücklich, dass der wichtigste Faktor in Bezug auf die Marktdynamik nicht zwingend dem risikoreichsten Faktor eines Portfolios entsprechen muss.<sup>86</sup>

<sup>86</sup> Es gibt Bondmanager, die ihre Portfolios gezielt gegenüber Änderungen des ersten PCA-Faktors absichern. Vgl. Hill/Vaysman (1998); Golup/Tilman (1997)

### 3.5 PLS-Grid-Methode

Wie das Beispiel des letzten Abschnitts aufgezeigt hat, besteht die Notwendigkeit die risikorelevanten Faktoren portfolioabhängig zu bestimmen. Diesem Zusammenhang wird mit der "Portfolio Principal Component Analysis" von Kreinin et. al (1998) Rechnung getragen. Bei dieser Methode werden diejenigen PCA-Faktoren zur Grid-Modellierung ausgewählt, deren Veränderungen zu den grössten Marktwertverlusten führen. Um den Einfluss der PCA-Faktoren auf die G/V-Funktion zu messen, wird diese partiell nach den verschiedenen PCA-Faktoren abgeleitet. Der wichtigste PCA-Faktor ist derjenige, dessen Wert der ersten partiellen Ableitung am grössten ist. Da aber lediglich die erste partielle Ableitung der G/V-Funktion bzgl. den PCA-Faktoren berücksichtigt wird, kann die Prioritätenordnung der PCA-Faktoren für stark nicht-lineare Portfolios falsch eingeschätzt werden, wie die Autoren selbstkritisch einräumen.

Ebenfalls portfolioabhängig werden die Faktoren nach der PLS-Grid-Methode (PLS: Partial-Least-Squares) von Gibson/Pritsker (2000) bestimmt, die im Weiteren vorgestellt werden soll. Die Tabelle 3-11 gibt zunächst den Ablauf der PLS-Grid-Methode wieder.

Tabelle 3-11: Ablauf der PLS-Grid-Methode

1. Pre-Calculation-Datenset	Zur Bestimmung der PLS-Faktoren wird ein Datenset benötigt. Das Datenset besteht aus Marktszenarien und den entsprechenden G/V-Werten des Portfolios.
2. Extraktion der PLS-Faktoren	Basierend auf dem Pre-Calculation-Datenset wird die gewünschte Anzahl PLS-Faktoren ermittelt.
3. Konstruktion des PLS-Grids	Abbildung der G/V-Funktion des Portfolios mit Hilfe eines Grids entlang der PLS-Faktoren
4. Erzeugung der MC-Szenarien	Mit einem Zufallszahlengenerator werden zufällige Marktszenarien erzeugt.
5. Ermittlung der G/V-Werte der Szenarien	Die G/V-Werte der MC-Szenarien werden mit der PLS-Grid-G/V-Funktion approximiert.
6. Anordnung der Resultate und Bestimmung des VaR	Anordnung der G/V-Werte und Ermittlung des VaR

#### 3.5.1 Pre-Calculation-Datenset

Im Gegensatz zur PCA-Grid-Methode, die sich bei der Extraktion der PCA-Faktoren auf die Kovarianzmatrix bzw. die Korrelationsmatrix stützt, bezieht die PLS-Grid-Methode bei der Ermittlung der PLS-Faktoren neben der Dynamik der Marktfaktoren  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, M$

auch deren Auswirkungen auf die G/V-Werte  $\Delta P$  mit ein.<sup>1</sup> Zu diesem Zweck benötigt die PLS-Methode ein Datenset, das verschiedene Marktszenarien mit den entsprechenden G/V-Werten enthält.

Die  $N^{PC}$  Marktszenarien, in Form von Marktfaktorschocks,

$$\left( \mathbf{s}_{\bullet,1}, \dots, \mathbf{s}_{\bullet,N^{PC}} \right) = \begin{pmatrix} s_{1,1} & \cdots & s_{1,N^{PC}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{M,1} & \cdots & s_{M,N^{PC}} \end{pmatrix}, \quad (3-60)$$

sind um Null zentriert, damit die Annahme  $E(S_i) = 0$ ,  $i = 1, \dots, M$ , erfüllt ist,<sup>2</sup> d.h.

$$\frac{\sum_{j=1}^{N^{PC}} s_{i,j}}{N^{PC}} = 0, \quad i = 1, \dots, M. \quad (3-61)$$

Für alle  $N^{PC}$  Szenarien werden nun die G/V-Werte des zu Grunde liegenden Portfolios berechnet und im  $(1 \times N^{PC})$ -Vektor  $\Delta \mathbf{p}$  zusammengefasst:

$$\Delta \mathbf{p} = (\Delta p_1, \dots, \Delta p_{N^{PC}}), \quad (3-62)$$

wobei die Gewinn/Verlust-Werte der Einfachheit der Notation halber um Null zentriert werden

$$\frac{\sum_{j=1}^{N^{PC}} \Delta p_j}{N^{PC}} = 0. \quad (3-63)$$

Die Berechnungen, die im Vorfeld der eigentlichen PLS-Analyse für die Zusammenstellung des Datensets gemacht werden müssen, werden in dieser Arbeit *Pre-Calculations* genannt. Je grösser die Anzahl der Pre-Calculations  $N^{PC}$  gewählt wird, desto einfacher lassen sich sinnvolle PLS-Faktoren ermitteln, desto aufwändiger werden aber auch die damit ver-

<sup>1</sup> Mit der PLS-Methode wird die Kovarianz zwischen  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  und  $\Delta P$  erklärt. Vgl. Stone/Brooks (1990), S. 242

<sup>2</sup> Vgl. 2.2.3 Erwartungswert des Risikovektors, S. 17

bundenen Berechnungen. Auf diese Zusammenhänge wird im zweiten Teil dieser Arbeit noch detaillierter eingegangen.

### 3.5.2 Extraktion der PLS-Faktoren

Ist das Pre-Calculation-Datenset vorhanden, können daraus die PLS-Faktoren sequenziell in jeweils drei Einzelschritten extrahiert werden:<sup>3</sup>

- i) Regressionsanalysen durchführen
- ii) PLS-Faktor aus den Regressionskoeffizienten zusammensetzen
- iii) Residuen ermitteln

#### i) Regressionsanalysen durchführen

Zur Darstellung der PLS-Methode muss zunächst die Notation angepasst werden. Für die neuen Variablen gilt<sup>4</sup>

$$\Delta\check{P}_{\check{W}_1} = \Delta P \quad , \quad \text{bzw.} \quad \Delta\check{\mathbf{p}}_{\check{W}_1} = \Delta \mathbf{p} \quad (3-64)$$

sowie

$$\check{S}_{\check{W}_1,i} = S_i \quad , \quad \text{bzw.} \quad \check{\mathbf{s}}_{\check{W}_1,i} = \mathbf{s}_{i,\bullet} = (s_{i,1}, \dots, s_{i,N^{PC}}) \quad , \quad i = 1, \dots, M \quad (3-65)$$

Der  $(1 \times N^{PC})$ -Vektor  $\check{\mathbf{s}}_{\check{W}_1,i}$  beinhaltet die Ausprägungen der  $i$ -ten Risikokomponente für die  $N^{PC}$  Marktszenarien. Der  $(1 \times N^{PC})$ -Vektor  $\Delta\check{\mathbf{p}}_{\check{W}_1}$  enthält die G/V-Werte des Portfolios für die entsprechenden Szenarien.

Um den ersten PLS-Faktor  $\check{W}_1$  zu ermitteln, wird  $\Delta\check{P}_{\check{W}_1}$  einzeln der Reihe nach bezüglich  $\check{S}_{\check{W}_1,i}$ ,  $i = 1, \dots, M$  regressiert. Da der Erwartungswert von  $\Delta\check{P}_{\check{W}_1}$  Null beträgt,<sup>5</sup> gilt für die  $i$ -te lineare Regressionsfunktion  $\Delta\check{P}_{\check{W}_1,i}^*$  nach der Methode der kleinsten Quadrate<sup>6</sup>

$$\Delta\check{P}_{\check{W}_1,i}^* = b_{\check{W}_1,i} \cdot \check{S}_{\check{W}_1,i} \quad i = 1, \dots, M, \quad (3-66)$$

<sup>3</sup> Vgl. Garthwaite (1994), S. 123 f.

<sup>4</sup> Die Vektoren und Variablen werden speziell mit demjenigen PLS-Faktor  $\check{W}_k$ ,  $k \in \{1, \dots, N^{PLS}\}$  indiziert, zu dessen Ermittlung sie gerade dienen. Da die PLS-Faktoren sequenziell bestimmt werden, ändert die Indizierung der Reihe nach von  $\check{W}_1$  nach  $\check{W}_{N^{PLS}}$ .

<sup>5</sup> Vgl. Gleichung (3-63), S. 78

<sup>6</sup> Bosch (1998), S. 594, Bronstein (1999), S. 774

wobei für den entsprechenden  $i$ -ten Regressionskoeffizienten gilt<sup>7</sup>

$$b_{\tilde{W}_1,i} = \frac{\Delta \tilde{\mathbf{p}}_{\tilde{W}_1} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{\tilde{W}_1,i}^T}{\tilde{\mathbf{s}}_{\tilde{W}_1,i} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{\tilde{W}_1,i}^T} \quad i = 1, \dots, M. \quad (3-67)$$

### ii) PLS-Faktor aus den Regressionskoeffizienten zusammensetzen

Alle  $M$  Regressionsfunktionen  $\Delta \tilde{P}_{\tilde{W}_1,i}^*$ ,  $i = 1, \dots, M$  sind Schätzfunktionen von  $\Delta \tilde{P}_{\tilde{W}_1}$ . Bildet man aus allen Regressionsfunktionen eine einzige gemeinsame Schätzfunktion, wobei alle Schätzfunktionen  $\Delta \tilde{P}_{\tilde{W}_1,i}^*$  gleichwertig berücksichtigt werden, so erhält man den ersten PLS-Faktor<sup>8</sup>

$$\tilde{W}_1 = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^M b_{\tilde{W}_1,i} \cdot \tilde{S}_{\tilde{W}_1,i}. \quad (3-68)$$

### iii) Residuen ermitteln

Der erste PLS-Faktor  $\tilde{W}_1$  entspricht einer Linearkombination der Risikokomponenten und dient als Schätzfunktion der ursprünglichen G/V-Funktion. Derjenige Teil der G/V-Funktion, der nicht durch den ersten PLS-Faktor beschrieben werden kann, entspricht dem Residuum  $\Delta \tilde{P}_{\tilde{W}_2}$ .<sup>9</sup>

$$\Delta \tilde{P}_{\tilde{W}_2} = \Delta \tilde{P}_{\tilde{W}_1} - \left( \frac{\Delta \tilde{\mathbf{p}}_{\tilde{W}_1} \cdot \tilde{\mathbf{w}}_1^T}{\tilde{\mathbf{w}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{w}}_1^T} \right) \cdot \tilde{W}_1, \quad (3-69)$$

wobei

$$\tilde{\mathbf{w}}_1 = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^M b_{\tilde{W}_1,i} \cdot \tilde{\mathbf{s}}_{\tilde{W}_1,i}. \quad (3-70)$$

Zur Erklärung von  $\Delta \tilde{P}_{\tilde{W}_2}$  werden nun diejenigen Informationen von  $\tilde{S}_{\tilde{W}_1,i}$ ,  $i = 1, \dots, M$  verwendet, die nicht in den ersten PLS-Faktor  $\tilde{W}_1$  eingeflossen sind. Diese erhält man, indem

<sup>7</sup> Vgl. Bosch (1998), S. 594

<sup>8</sup> Die Gewichtung der einzelnen Schätzfunktionen muss nicht notwendigerweise gleich sein. Vgl. Garthwaite (1994), S. 124

<sup>9</sup> Vgl. Bosch (1998), S. 598

$\check{S}_{\check{W}_1,i}$  bezüglich  $\check{W}_1$  regressiert wird, so dass die Residuen  $\check{S}_{\check{W}_2,i}$ ,  $i = 1, \dots, M$  ermittelt werden können

$$\check{S}_{\check{W}_2,i} = \check{S}_{\check{W}_1,i} - \left( \frac{\check{\mathbf{s}}_{\check{W}_1,i} \cdot \check{\mathbf{w}}_1^T}{\check{\mathbf{w}}_1 \cdot \check{\mathbf{w}}_1^T} \right) \cdot \check{W}_1. \quad (3-71)$$

Die Residuen  $\check{S}_{\check{W}_2,i}$ ,  $i = 1, \dots, M$  dienen danach zur Konstruktion des zweiten PLS-Faktors, mit dem der bisher unerklärte Teil der G/V-Funktion  $\Delta\check{P}_{\check{W}_2}$  erklärt werden soll.

Die drei beschriebenen Schritte i) bis iii) werden so lange durchgeführt, bis alle erforderlichen PLS-Faktoren extrahiert sind. Die Ermittlung des zweiten PLS-Faktors erfolgt demnach analog zum ersten, indem wiederum zuerst die  $M$  Regressionsfunktionen aufgestellt<sup>10</sup>

$$\Delta\check{P}_{\check{W}_2,i}^* = b_{\check{W}_2,i} \cdot \check{S}_{\check{W}_2,i} \quad i = 1, \dots, M \quad (3-72)$$

und wieder zu einer einzigen zusammengeführt werden

$$\check{W}_2 = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^M b_{\check{W}_2,i} \cdot \check{S}_{\check{W}_2,i}. \quad (3-73)$$

Der zweite PLS-Faktor  $\check{W}_2$  stellt dann eine Schätzfunktion von  $\Delta\check{P}_{\check{W}_2}$  dar, also für denjenigen Teil der G/V-Funktion, der nicht durch den ersten PLS-Faktor  $\check{W}_1$  erklärt werden konnte.

Danach werden das Residuum  $\Delta\check{P}_{\check{W}_3}$ , welches dem Teil von  $\Delta\check{P}_{\check{W}_2}$  entspricht, der nicht durch  $\check{W}_2$  erklärt werden konnte, sowie die entsprechenden Residuen  $\check{S}_{\check{W}_3,i}$ ,  $i = 1, \dots, M$  ermittelt.

Der Prozess wird so lange sequenziell fortgesetzt, bis die gewünschte Anzahl  $N^{PLS}$  der PLS-Faktoren ermittelt ist.

<sup>10</sup> Vgl. entsprechende Regressionsgleichungen (3-67), S. 80

### Orthogonalität der PLS-Faktoren

Aufgrund der speziellen Konstruktion sind alle PLS-Faktoren untereinander unkorreliert. Zum Beispiel setzt sich der zweite PLS-Faktor  $\tilde{W}_2$  aus den Residuen  $\tilde{S}_{\tilde{W}_2,i}$ ,  $i = 1, \dots, M$  zusammen, die bei den Regressionen von  $\tilde{S}_{\tilde{W}_1,i}$ ,  $i = 1, \dots, M$  bezüglich des ersten PLS-Faktors  $\tilde{W}_1$  entstanden sind. Da die Residuen  $\tilde{S}_{\tilde{W}_2,i}$  unkorreliert zum Regressor  $\tilde{W}_1$  sind, ist der aus den Residuen  $\tilde{S}_{\tilde{W}_2,i}$  zusammengestellte zweite PLS-Faktor  $\tilde{W}_2$  zu  $\tilde{W}_1$  ebenfalls unkorreliert. Allgemein gilt also

$$\text{Cov}(\tilde{W}_l, \tilde{W}_k) = 0, \quad \forall k \neq l \in \{1, \dots, N^{PLS}\}. \quad (3-74)$$

### Zusammenhang zwischen Risikokomponenten und PLS-Faktoren

Um den gesuchten linearen Zusammenhang zwischen den ursprünglichen Risikokomponenten  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  und den PLS-Faktoren  $W_k$ ,  $k = 1, \dots, N^{PLS}$  offen zu legen, werden zunächst die PLS-Faktoren analog zu den PCA-Faktoren standardisiert

$$W_k = \frac{\tilde{W}_k}{\sigma_{\tilde{W}_k}}, \quad k = 1, \dots, N^{PLS} \quad (3-75)$$

mit

$$\sigma_{\tilde{W}_k} = \sqrt{\frac{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k^\top}{N^{PC} - 1}}. \quad (3-76)$$

Ausgangslage bildet nun die Gleichung (3-77), mit der die  $i$ -te Risikokomponente  $S_i$  bezüglich den standardisierten PLS-Faktoren  $W_1, \dots, W_{N^{PLS}}$  regressiert wird

$$S_i^* = \beta_{i,1} \cdot W_1 + \beta_{i,2} \cdot W_2 + \dots + \beta_{i,N^{PLS}} \cdot W_{N^{PLS}}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (3-77)$$

Mit ihr lassen sich die Faktorladungen

$$\beta_{i,k} = \frac{\mathbf{s}_{i,\bullet} \cdot \mathbf{w}_k^\top}{\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{w}_k^\top}, \quad k = 1, \dots, N^{PLS} \text{ und } i = 1, \dots, M. \quad (3-78)$$

bestimmen,<sup>11</sup> mit denen  $W_1, \dots, W_{N^{PLS}}$  approximativ in  $S_1, \dots, S_M$  und umgekehrt überführt werden können.

Analog zur PCA-Methode kann geschrieben werden<sup>12</sup>

$$\mathbf{S} \approx \mathbf{S}^{PLS(N^{PLS})}, \quad (3-79)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{PLS(N^{PLS})} &= \begin{pmatrix} S_1^{PLS(N^{PLS})} \\ \vdots \\ S_M^{PLS(N^{PLS})} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_{1,1} \cdot W_1 + \beta_{1,2} \cdot W_2 + \dots + \beta_{1,N^{PLS}} \cdot W_{N^{PLS}} \\ \vdots \\ \beta_{M,1} \cdot W_1 + \beta_{M,2} \cdot W_2 + \dots + \beta_{M,N^{PLS}} \cdot W_{N^{PLS}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-80)$$

### PLS-Vektor

Zur Vereinfachung der Notation wird der PLS-Vektor, der die ersten  $N^{PLS}$  standardisierten PLS-Faktoren enthält, definiert

$$\mathbf{W}^{PLS(N^{PLS})} = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_{N^{PLS}} \end{pmatrix} \quad (3-81)$$

<sup>11</sup> Da die PLS-Faktoren unkorreliert sind, können die Regressionen auch einzeln vorgenommen werden.

<sup>12</sup> Vgl. Gleichung (3-37), S. 63

### PLS-Ladungsmatrix

Ebenfalls soll die PLS-Ladungsmatrix eingeführt werden mit

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\beta}}}^{PLS(N^{PLS})} = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \cdots & \beta_{1,N^{PLS}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{M,1} & \cdots & \beta_{M,N^{PLS}} \end{pmatrix}. \quad (3-82)$$

Es kann also vereinfacht geschrieben werden<sup>13</sup>

$$\mathbf{S}^{PLS(N^{PLS})} = \underline{\underline{\boldsymbol{\beta}}}^{PLS(N^{PLS})} \cdot \mathbf{W}^{PLS(N^{PLS})}. \quad (3-83)$$

### 3.5.3 Konstruktion des PLS-Grids

Mit der PLS-Methode lässt sich, ebenso wie mit der PCA-Methode, die Anzahl risikorelevanter Faktoren reduzieren, so dass die ursprüngliche G/V-Funktion näherungsweise mit Hilfe der wichtigsten PLS-Faktoren abgebildet werden kann. Es resultiert die PLS-Grid-G/V-Funktion

$$\Delta P^{PLS-Grid(N^{PLS})} = \Delta P^{Grid}(W_1, \dots, W_{N^{PLS}}). \quad (3-84)$$

Auf den weiteren Ablauf der PLS-Grid-Methode:<sup>14</sup>

- Erzeugung der MC-Szenarien
- Ermittlung der G/V-Werte der Szenarien
- Anordnung der Resultate und Bestimmung des (PLS-Grid-)VaR

wird nicht mehr speziell eingegangen, da er analog zur Full-MC-Simulation verläuft, mit dem einzigen Unterschied, dass zur Ermittlung der G/V-Werte der MC-Szenarien der PLS-Grid verwendet wird.

### 3.5.4 Fortsetzung des Anwendungsbeispiels: Steepness-Bondportfolio

Zur Illustrierung der PLS-Methode dient wiederum das Steepness-Bondportfolio.<sup>15</sup> Wie das Beispiel aufgezeigt hat, war die durch den ersten PCA-Faktor beschriebene Zinsbewe-

<sup>13</sup> In Analogie zur Gleichung (3-41), S. 65

<sup>14</sup> Vgl. Tabelle 3-11: Ablauf der PLS-Grid-Methode, S. 77

<sup>15</sup> Vgl. 3.4.9 Anwendungsbeispiel: Steepness-Bondportfolio, S.67

gung nicht gleichzeitig die risikoreichste für das zu Grunde liegende Bondportfolio.<sup>16</sup> Im Folgenden soll nun getestet werden, ob die risikoreichste Zinskurvenbewegung mit der PLS-Methode identifiziert werden kann.

Für die Zusammenstellung des Pre-Calculation-Datensets werden 100 Pre-Calculations durchgeführt. Die Marktszenarien beruhen wiederum auf der Annahme eines multivariat-normalverteilten Risikovektors und werden künstlich durch MC-Simulationen erzeugt. Für die Ermittlung der G/V-Werte der Marktszenarien werden Portfolioneubewertungen durchgeführt.

Aufgrund des Pre-Calculation-Datensets errechnet sich folgende PLS-Ladungsmatrix<sup>17</sup>

$$\underline{\underline{\mathbf{\beta}}}^{PLS(3)} = \begin{pmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{1,2} & \beta_{1,3} \\ \beta_{2,1} & \beta_{2,2} & \beta_{2,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{10,1} & \beta_{10,2} & \beta_{10,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0295\% & 0.0497\% & 0.0161\% \\ 0.0184\% & 0.0359\% & -0.0137\% \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -0.0302\% & 0.0228\% & -0.0137\% \end{pmatrix} \quad (3-85)$$

der drei standardisierten PLS-Faktoren<sup>18</sup>

$$\mathbf{W}^{PLS(3)} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \end{pmatrix} \sim N_3(\mathbf{0}, \underline{\underline{\mathbf{I}}}). \quad (3-86)$$

Die Dynamik der Zinskurve soll nur durch die ersten drei PLS-Faktoren<sup>19</sup> näherungsweise wiedergegeben werden

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S} \quad \approx \quad \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S}^{PLS(3)} = \bar{\mathbf{X}} + \underline{\underline{\mathbf{\beta}}}^{PLS(3)} \cdot \mathbf{W}^{PLS(3)}. \quad (3-87)$$

Setzt man die entsprechenden Zahlenwerte ein, so erhält man für die Zinsdynamik des Anwendungsbeispiels

<sup>16</sup> Vgl. Tabelle 3-9: Zusammensetzung des Steepness-Bondportfolios, S. 74

<sup>17</sup> Sämtliches Zahlenmaterial findet sich im Anhang: 8.7 Zahlenmaterial für das Anwendungsbeispiel: Steepness-Bondportfolio, S. 188

<sup>18</sup> Da im Beispiel ein normalverteilter Risikovektor unterstellt wurde, muss auch der entsprechende PLS-Vektor normalverteilt sein.

<sup>19</sup> Da es sich im Weiteren bei den PLS-Faktoren immer um standardisierte PLS-Faktoren handelt, wird auf deren explizite Bezeichnung von nun an verzichtet.

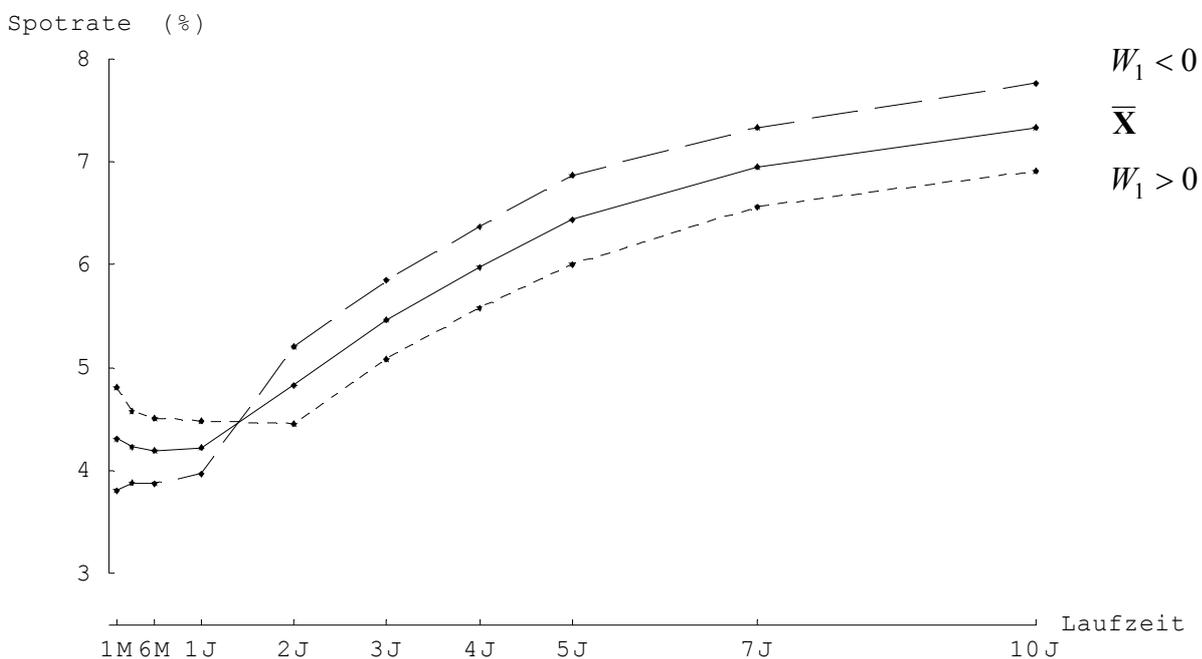
$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{10} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 4.30\% \\ \vdots \\ 7.34\% \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0295\% \cdot W_1 + 0.0497\% \cdot W_2 + 0.0161\% \cdot W_3 \\ \vdots \\ -0.0302\% \cdot W_1 + 0.0228\% \cdot W_2 - 0.0137\% \cdot W_3 \end{pmatrix}. \quad (3-88)$$

Wie bei der PCA-Methode werden auch hier nun die durch die PLS-Faktoren beschriebenen Zinsbewegungen grafisch dargestellt.

### Zinskurvenbewegung des ersten PLS-Faktors

Der erste PLS-Faktor beschreibt eine Drehbewegung der Zinskurve, bei der sich die kurzfristigen Zinssätze in entgegengesetzter Richtung zu den langfristigen bewegen (vgl. Abbildung 3-17). Genau dieser Drehbewegung ist das Steepness-Bondportfolio aufgrund seiner Long/Short-Konstruktion in besonderem Mass ausgesetzt, wie das die Werte der Tabelle 3-12 auf S. 89 belegen. Die PLS-Methode deckt demnach erfolgreich die risikoreichste Bewegung auf.

Abbildung 3-17: Zinskurvenbewegung in Abhängigkeit des ersten PLS-Faktors  $W_1$

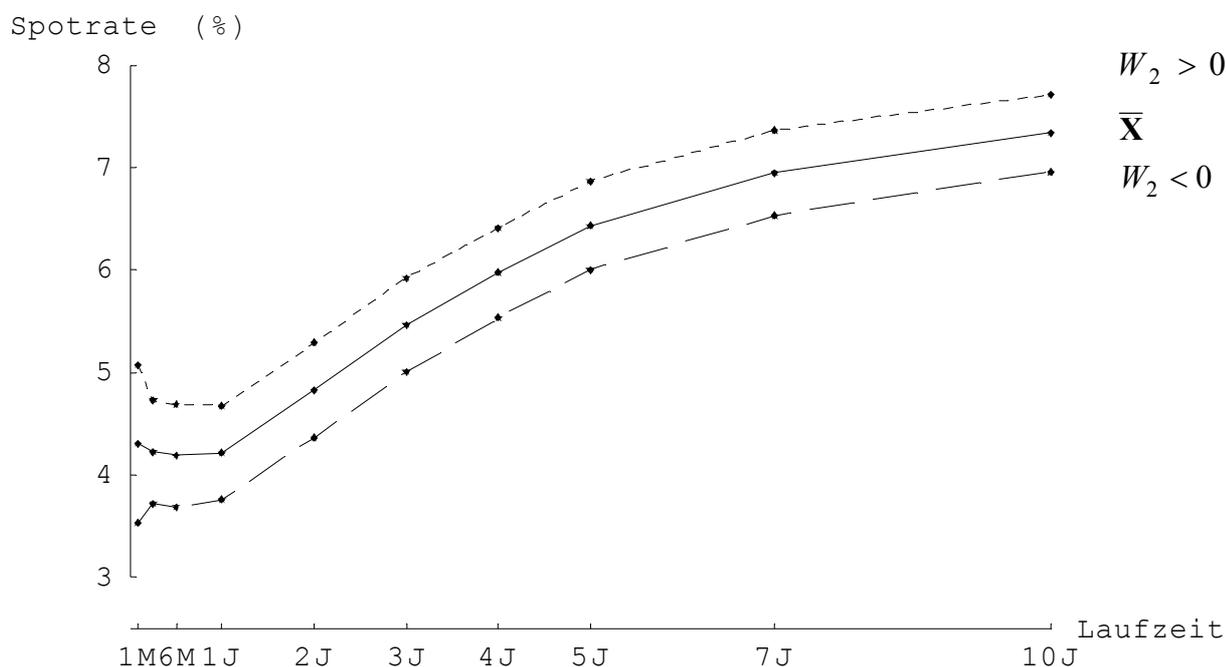


### Zinskurvenbewegung des zweiten PLS-Faktors

Der zweite PLS-Faktor beschreibt in etwa diejenige Bewegung, die bereits durch den ersten PCA-Faktor beschrieben wurde. Besonders interessant ist, dass der Portfolioverlust, ausgelöst durch Veränderung des zweiten PLS-Faktors, kleiner ist als der Verlust, der

durch eine entsprechende Veränderung des dritten PLS-Faktors resultiert. Die Frage drängt sich deshalb auf, warum die Bewegung des dritten PLS-Faktors nicht vorgezogen wird. Der Grund hierfür ist, dass neben der Preisreaktion des Portfolios auch die Wahrscheinlichkeit der entsprechenden Zinsbewegung bei der Auswahl der PLS-Faktoren eine Rolle spielt. Da aus Sicht der Zinsdynamik eine Parallelbewegung um einiges wahrscheinlicher als eine Krümmungsveränderung ist,<sup>20</sup> gibt die PLS-Methode dieser Bewegung korrekterweise den Vorzug.

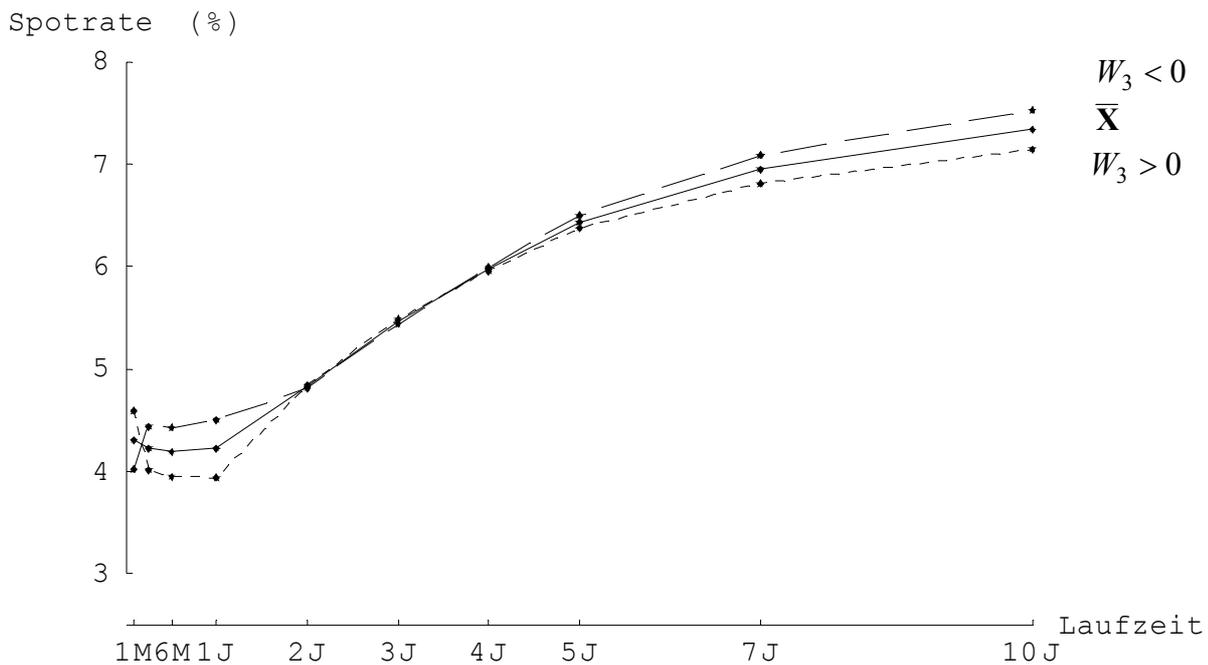
Abbildung 3-18: Zinskurvenbewegung in Abhängigkeit des zweiten PLS-Faktors  $W_2$



### Zinskurvenbewegung des dritten PLS-Faktors

Die Bewegung, die durch den dritten PLS-Faktor ausgelöst wird, besitzt im Gegensatz zu den ersten beiden Faktoren Ähnlichkeit mit der Bewegung des dritten PCA-Faktors, vgl. Abbildung 3-19. Die PLS-Methode tauscht im vorliegenden Beispiel lediglich die Ordnung der ersten beiden Faktoren aus.

<sup>20</sup> Gemäss der PCA-Methode erklärt der Level-Faktor rund 58.41% und der Curvature-Faktor lediglich 0.47% der Gesamtvarianz. Vgl. Berechnungen in Gleichung (3-52), S. 70

Abbildung 3-19: Zinskurvenbewegung in Abhängigkeit des dritten PLS-Faktors  $W_3$ 

### Risikorelevanz der PLS-Faktoren für das Steepness-Bondportfolio

Um festzustellen, wie sich die PLS-Zinsbewegungen auf den Wert des Steepness-Bondportfolios<sup>21</sup> auswirken, wird die G/V-Funktion in Abhängigkeit der PLS-Faktoren umgeformt

$$\begin{aligned}
 \Delta P &= P(\mathbf{X}) - P^{Plan} \\
 &= P(\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S}) - P^{Plan} \\
 &\approx P(\bar{\mathbf{X}} + \mathbf{S}^{PLS(3)}) - P^{Plan} \\
 &= NW_A \cdot \exp(-LZ_A \cdot (\bar{X}_1 + S_1^{PLS(3)})) - NW_B \cdot \exp(-LZ_B \cdot (\bar{X}_{10} + S_{10}^{PLS(3)})) - P^{Plan} \\
 &= NW_A \cdot \exp(-LZ_A \cdot (\bar{X}_1 + \beta_{1,1} \cdot W_1 + \beta_{1,2} \cdot W_2 + \beta_{1,3} \cdot W_3)) \\
 &\quad - NW_B \cdot \exp(-LZ_B \cdot (\bar{X}_{10} + \beta_{10,1} \cdot W_1 + \beta_{10,2} \cdot W_2 + \beta_{10,3} \cdot W_3)) - P^{Plan} \quad (3-89)
 \end{aligned}$$

Tabelle 3-12 gibt die Preisreaktionen des Portfolios auf ausgewählte PLS-Faktoränderungen wieder.

<sup>21</sup> Vgl. Tabelle 3-9: Zusammensetzung des Steepness-Bondportfolios, S. 74

Tabelle 3-12: G/V-Werte aufgrund ausgewählter PLS-Faktorschocks

Simulierter PLS-Faktor	Zustand der PLS-Faktoren*			1-Monats-Spotrate: $X_1$	10-Jahres-Spotrate: $X_{10}$	Gewinn/Verlust $\Delta P$ (in GE)
	$W_1$	$W_2$	$W_3$			
Ausgangslage	0	0	0	4.3000%	7.3400%	0
Erster $W_1$	1	0	0	4.3295%	7.3098%	-5352
	-1	0	0	4.2705%	7.3702%	5343
Zweiter $W_2$	0	1	0	4.3497%	7.3628%	-1936
	0	-1	0	4.2503%	7.3172%	1931
Dritter $W_3$	0	0	1	4.3161%	7.3263%	-2660
	0	0	-1	4.2839%	7.3537%	2659

\* Der Wert 1 entspricht genau der Volatilität der standardisierten PLS-Faktoren.

Wie man anhand der obigen Tabelle erkennen kann, erklärt der erste PLS-Faktor in der Tat die risikorelevanteste Zinsbewegung aus Sicht des Steepness-Portfolios. Die Krümmungsbewegung, die durch den dritten PLS-Faktor beschrieben wird, löst zwar grössere Preisschwankungen aus als die Parallelbewegungen des zweiten PLS-Faktors. Da aber, wie erwähnt, die Wahrscheinlichkeit einer Krümmungsbewegung um einiges kleiner ist als die einer Parallelbewegung, ordnet die PLS-Methode richtigerweise dem zweiten PLS-Faktor nicht die Krümmungs-, sondern die Parallelbewegung zu.

### 3.6 Grid-MC-Methoden für umfangreiche Portfolios

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie die Grid-MC-Methoden (PLS-Grid-, PCA-Grid-Methoden) zur VaR-Berechnung umfangreicher<sup>22</sup> Portfolios (z.B. grosse Handelsportfolios von Banken) angewandt werden können.

Das Problem grid-basierter VaR-Methoden ist, dass der Grid, wenn viele Faktoren (PLS- oder PCA-Faktoren) bei der Beurteilung des Risikos berücksichtigt werden müssen, hochdimensional wird, so dass dessen Konstruktion mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden ist.<sup>23</sup>

Betrachtet sei z.B. ein Portfolio, das ursprünglich von 100 verschiedenen Marktfaktoren abhängt. Durch Anwendung der PLS- oder der PCA-Methode sei eine Reduktion der Marktfaktoren auf 15 risikorelevante (PLS-/PCA-) Faktoren möglich. Wird ein Grid mit fünfzehn Faktoren und jeweils drei Grid-Punkten aufgestellt, so resultieren daraus  $3^{15} = 14'348'907$  Knotenpunkte, für die jeweils der entsprechende G/V-Wert durch Neubewertung des gesamten Portfolios ermittelt werden muss.

Eine Möglichkeit, das Problem eines hochdimensionalen Grids zu umgehen, besteht darin, das zu Grunde liegende Portfolio in mehrere *Subportfolios* zu unterteilen. Subportfolios müssen mit den im *Marktfaktorblock* zusammengefassten Marktfaktoren in lokaler Währung bewertet werden können. Jedes Subportfolio besitzt einen Marktfaktorblock. Ein Marktfaktorblock umfasst eng miteinander in Verbindung stehende Marktfaktoren, wie z.B. die Spotrates einer Zinskurve.<sup>24</sup>

Durch diese systematische Gruppierung der Marktfaktoren wird die Voraussetzung zur effizienten Reduktion der Faktordimensionalität auf Ebene der Marktfaktorblöcke geschaffen,<sup>25</sup> so dass für jeden Marktfaktorblock eine *low-dimensional-Grid-G/V-Funktion* erstellt werden kann. Die Grid-Approximation erfolgt somit nicht auf Gesamtportfolioebene sondern auf Ebene der Marktfaktorblöcke. Die VaR-Berechnung erfolgt in sechs Schritten (vgl. Tabelle 3-13).

---

<sup>22</sup> In diesem Zusammenhang wird ein Portfolio als gross oder umfangreich bezeichnet, wenn es eine Vielzahl (verschiedener) Finanzinstrumente enthält und sein Wert von zahlreichen Marktfaktoren abhängt.

<sup>23</sup> Vgl. Tabelle 3-5: Anzahl Berechnungen in Abhängigkeit der Anzahl Marktfaktoren und Grid-Punkte, S. 58

<sup>24</sup> Vgl. Reimers/Zerbs (1998)

<sup>25</sup> Je stärker die Marktfaktoren eines Blocks miteinander korreliert sind, desto weniger (PLS-/PCA-) Faktoren sind zur Beschreibung der gemeinsamen Bewegungen notwendig.

Tabelle 3-13: Ablauf der PLS-Grid-Methode bei umfangreichen Portfolios

Schritt 1: Bildung der Marktfaktorblöcke und Instrumentenzuordnung
Schritt 2: Grid-G/V-Funktion auf Ebene der Marktfaktorblöcke
Schritt 3: MC-Simulation
Schritt 4: Ermittlung der G/V-Vektoren der Marktfaktorblöcke
Schritt 5: Währungsumwandlung und Konsolidierung der G/V-Werte
Schritt 6: Ermittlung der G/V-Verteilung und des VaR

Dieses Konzept soll anhand eines einfachen Beispiels illustriert werden. Es wird ein international diversifiziertes Bondportfolio betrachtet, dessen Basiswährung der Schweizer Franken (CHF) ist und in dem sich Bonds unterschiedlichster Währungen, wie Euro (EUR), US-Dollar (USD) usw., befinden. Alle Bonds lassen sich anhand der jeweiligen Zinskurve in der entsprechenden lokalen Währung bewerten. So lassen sich sämtliche EUR-Bonds mit Hilfe der EUR-Zinskurve  $\mathbf{X}_{IR-EUR}$ <sup>26</sup> in EUR bewerten, sämtliche USD-Bonds anhand der USD-Zinskurve  $\mathbf{X}_{IR-USD}$  in USD usw.

Um den Wert eines Fremdwährungsbonds in CHF zu erhalten, wird sein lokaler Wert mit dem entsprechenden Wechselkurs ( $X_{FX-EUR}, \dots, X_{FX-USD}$ ) multipliziert, wobei der Wechselkurs definiert ist als

$$X_{FX-FREMDWÄHRUNG} = \frac{\text{Basiswährung}}{\text{Fremdwährung}}. \quad (3-90)$$

Der EUR-Wechselkurs lautet z.B.

$$X_{FX-EUR} = \frac{CHF}{EUR}. \quad (3-91)$$

Wird der Preis eines in EUR denominierten EUR-Bonds  $P_{EUR-Bond}[EUR]$  in CHF umgewandelt, so gilt<sup>27</sup>

$$P_{EUR-Bond}[CHF] = P_{EUR-Bond}[EUR] \cdot X_{FX-EUR}. \quad (3-92)$$

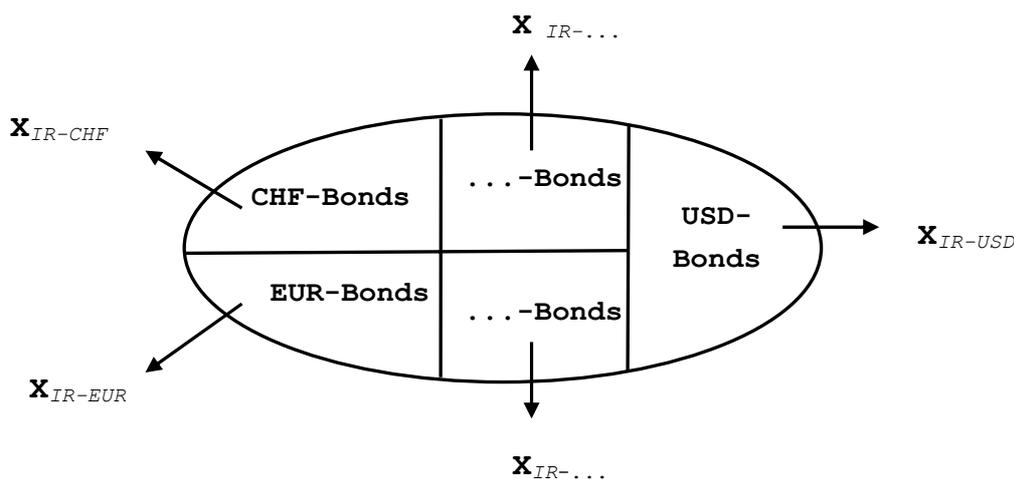
<sup>26</sup> Vektor, der die Spotrates enthält, mit denen die EUR-Zinskurve abgebildet wird.

<sup>27</sup> Die Währung, in der der Preis ausgewiesen wird, ist in der eckigen Klammer angegeben.

### Schritt 1: Bildung der Marktfaktorblöcke und Instrumentenzuordnung

In einem ersten Schritt werden die Marktfaktorblöcke und die entsprechenden Subportfolios definiert. Beim vorliegenden Bondportfolio macht es Sinn, die Spotrates einer Zinskurve zu einem Marktfaktorblock zusammenzufassen. Die Spotrates einer Zinskurve stehen in engem Zusammenhang miteinander und versprechen deshalb eine effiziente Reduktion der Dimensionalität durch die PLS-Methode.<sup>28</sup> Die Subportfolios der Marktfaktorblöcke umfassen jeweils sämtliche Bonds der entsprechenden Währung. EUR-Bonds werden dem Marktfaktorblock "EUR-Spotrates" ( $X_{IR-EUR}$ ) zugeordnet, USD-Bonds dem Marktfaktorblock "USD-Spotrates" ( $X_{IR-USD}$ ) usw. (vgl. Abbildung 3-20). Alle Subportfolios sind mit Hilfe der Marktfaktoren des entsprechenden Marktfaktorblocks in lokaler Währung bewertbar.

Abbildung 3-20: Bildung von Subportfolios für die Marktfaktorblöcke



### Schritt 2: Grid-G/V-Funktion auf Ebene der Marktfaktorblöcke

In einem zweiten Schritt werden die grid-approximierten G/V-Funktionen für die Subportfolios der Marktfaktorblöcke bestimmt. Hierzu werden mit der PLS-Methode die Dimensionalität der Spotrates auf Ebene der Marktfaktorblöcke (der Zinskurven) reduziert.

<sup>28</sup> Alternativ kann auch die PCA-Methode angewandt werden. Die weiteren Ausführungen beschränken sich jedoch auf die PLS-Grid-Methode.

Betrachtet man den Marktfaktorblock "EUR-Zinskurve" und nimmt an, dass sich die Zinskurve zum Zeitpunkt  $T$ , ausgehend von der erwarteten Zinskurve  $\bar{\mathbf{X}}_{IR-EUR}$ , mit Hilfe dreier PLS-Faktoren  $W_{IR-EUR,i}$ ,  $i = 1,2,3$  grösstenteils approximieren lässt:<sup>29</sup>

$$\mathbf{X}_{IR-EUR} \approx \bar{\mathbf{X}}_{IR-EUR} + \underset{=IR-EUR}{\boldsymbol{\beta}}^{PLS(3)} \cdot \mathbf{W}_{IR-EUR}^{PLS(3)}, \tag{3-93}$$

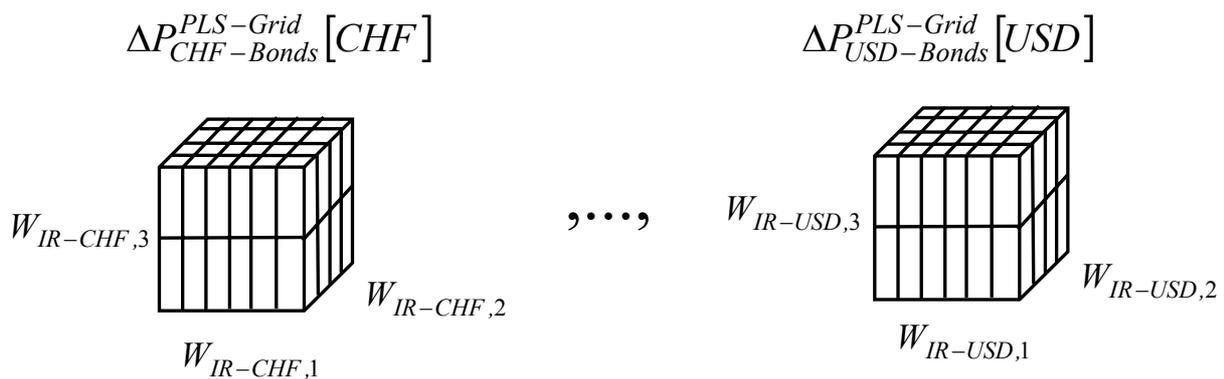
so kann mit der PLS-Grid-G/V-Funktion  $\Delta P_{EUR-Bonds}^{PLS-Grid} [EUR]$  die G/V-Funktion des Subportfolios EUR-Bonds annähernd abgebildet werden. Gleiches soll für die übrigen Subportfolios gelten, deren PLS-Grid-G/V-Funktionen dann lauten

$$\Delta P_{CHF-Bonds}^{PLS-Grid} [CHF], \dots, \Delta P_{USD-Bonds}^{PLS-Grid} [USD]. \tag{3-94}$$

Mit Hilfe der entsprechenden PLS-Grid-G/V-Funktion lassen sich somit alle Subportfolios approximativ in lokaler Währung bewerten.

In Abbildung 3-21 ist der zweite Schritt schematisch dargestellt. Die Grid-G/V-Funktionen sind dabei als Würfel dargestellt (7x5x3-Grid).

Abbildung 3-21: PLS-Grid-G/V-Funktionen der Marktfaktorblöcke (in Lokalwährung)



### Schritt 3: MC-Simulation

Nachdem die Grid-G/V-Funktionen für alle Marktfaktorblöcke bekannt sind, werden in einem dritten Schritt  $N^{MC}$  MC-Szenarien geschaffen<sup>30</sup>

<sup>29</sup> Approximation des Marktvektors mit Hilfe der PLS-Faktoren, vgl. Gleichung (3-87), S. 85  
<sup>30</sup> Zum Beispiel durch Historische Simulation oder herkömmliche MC-Simulation.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_{IR-CHF,1} & \cdots & \mathbf{x}_{IR-CHF,N^{MC}} \\ \mathbf{x}_{IR-EUR,1} & \cdots & \mathbf{x}_{IR-EUR,N^{MC}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_{IR-USD,1} & \cdots & \mathbf{x}_{IR-USD,N^{MC}} \\ x_{FX-EUR,1} & \cdots & x_{FX-EUR,N^{MC}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{FX-USD,1} & \cdots & x_{FX-USD,N^{MC}} \end{pmatrix}. \quad (3-95)$$

Der Eintrag  $\mathbf{x}_{IR-EUR,i}$ ,  $i = 1, \dots, N^{MC}$  in der  $i$ -ten Spalte beschreibt z.B. das  $i$ -te Marktszenario für die EUR-Zinskurve (in Form einer zufälligen Ausprägung des Zufallsvektors  $\mathbf{X}_{IR-DEM}$ ), während der Eintrag  $x_{FX-EUR,i}$  die entsprechende Ausprägung des EUR-Wechselkurses bezeichnet.

#### Schritt 4: Ermittlung der G/V-Vektoren der Marktfaktorblöcke

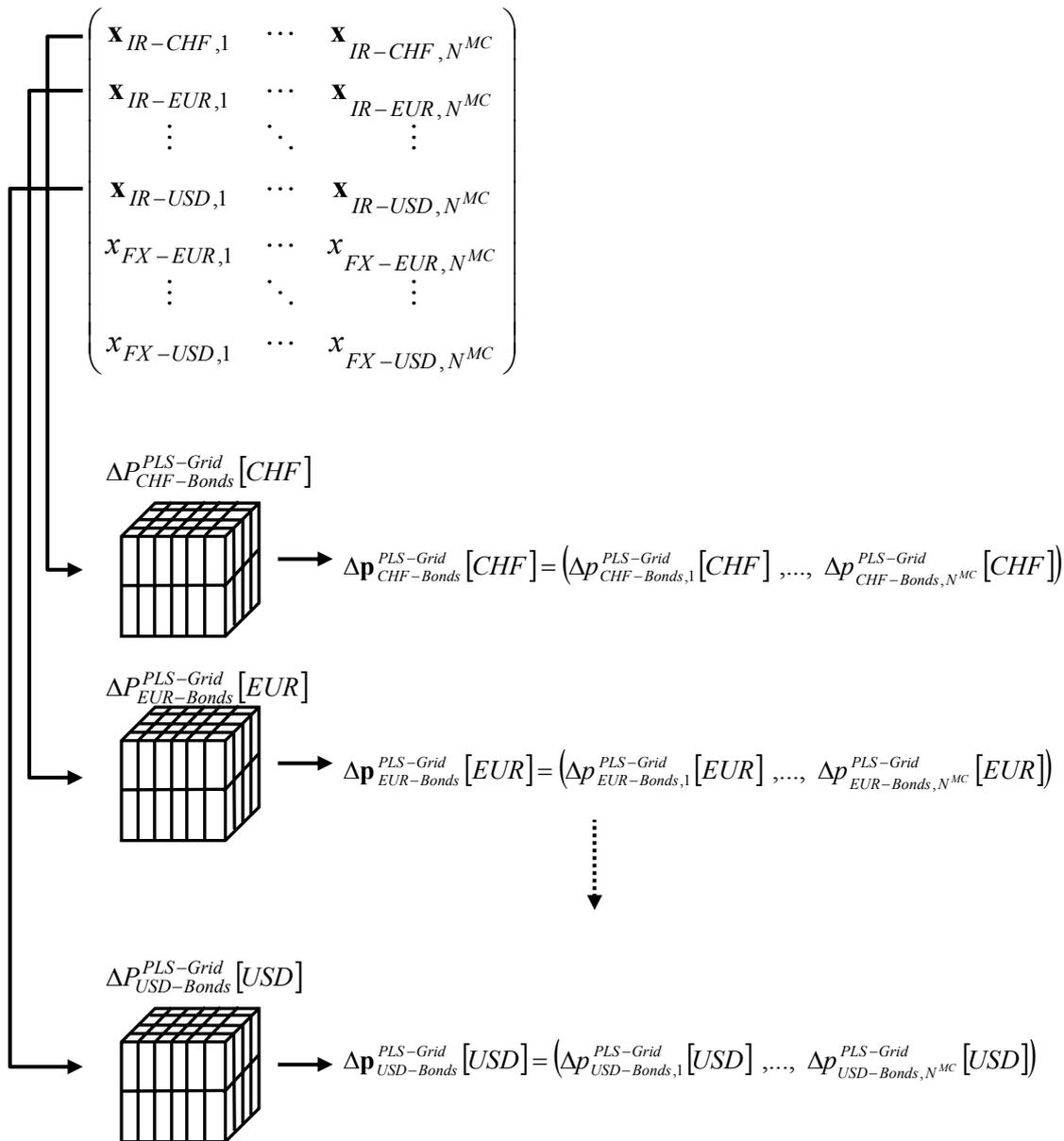
Im Gegensatz zur Full-MC-Methode werden die Gewinn/Verlust-Werte der Marktszenarien nicht durch Neubewertung aller Bonds, sondern mit Hilfe der entsprechenden PLS-Grid-G/V-Funktionen auf Ebene der Marktfaktorblöcke ermittelt. Hierzu werden die simulierten Marktfaktorausprägungen in die entsprechenden PLS-Faktorausprägungen transformiert. So wie sich aus den PLS-Faktoren die Spotrates herleiten lassen, können umgekehrt auch aus den Spotrates die PLS-Faktoren ermittelt werden.

Sind die Ausprägungen der PLS-Faktoren für die MC-Szenarien bekannt, können die G/V-Werte der Subportfolios für die Marktszenarien in lokaler Währung mit Hilfe der entsprechenden PLS-Grid-G/V-Funktionen bestimmt werden

$$\Delta \mathbf{p}_{CHF-Bonds}^{PLS-Grid} [CHF], \dots, \Delta \mathbf{p}_{USD-Bonds}^{PLS-Grid} [USD]. \quad (3-96)$$

Das Vorgehen ist in Abbildung 3-22 schematisch dargestellt.

Abbildung 3-22: Berechnung der G/V-Werte auf Ebene der Subportfolios



### Schritt 5: Währungsumwandlung und Konsolidierung der G/V-Werte

Um den G/V-Vektor  $\Delta \mathbf{p}^{PLS-Grid} [CHF]$  des Gesamtportfolios in CHF zu erhalten, müssen zunächst die G/V-Vektoren der Subportfolios in CHF umgewandelt werden.

Dafür werden sämtliche G/V-Werte der Subportfolios in lokaler Währung mit den entsprechenden szenarioabhängigen Wechselkursausprägungen multipliziert. So wird z.B. der  $i$ -te EUR-G/V-Wert des EUR-Subportfolios

$$\Delta p_{EUR-Bonds,i}^{PLS-Grid} [EUR], \quad i = 1, \dots, N^{MC} \quad (3-97)$$

mit der  $i$ -ten szenariospezifischen Wechselkursausprägung multipliziert

$$\Delta p_{EUR-Bonds,i}^{PLS-Grid}[CHF] = \Delta p_{EUR-Bonds,i}^{PLS-Grid}[CHF] \cdot x_{FX-EUR,i}, \quad i = 1, \dots, N^{MC}, \quad (3-98)$$

um den  $i$ -ten G/V-Wert des EUR-Subportfolios in CHF zu erhalten. Werden alle Markt-szenarien in die Basiswährung umgewandelt, so resultiert der G/V-Vektor des EUR-Subportfolios in CHF

$$\Delta p_{EUR-Bonds}^{PLS-Grid}[CHF] = \left( \Delta p_{EUR-Bonds,1}^{PLS-Grid}[CHF], \dots, \Delta p_{EUR-Bonds,N^{MC}}^{PLS-Grid}[CHF] \right). \quad (3-99)$$

Sind sämtliche G/V-Werte der Subportfolios in CHF umgewandelt, so kann der G/V-Vektor des Gesamtportfolios  $\Delta p^{PLS-Grid}[CHF]$  durch einfache Addition gefunden werden

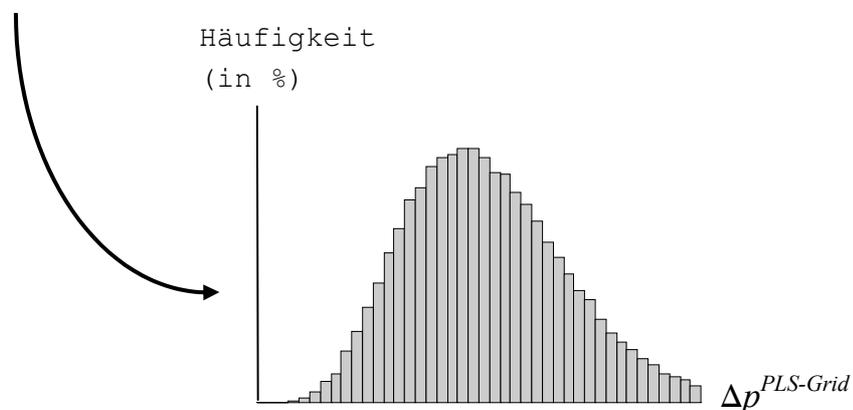
$$\Delta p^{PLS-Grid}[CHF] = \Delta p_{CHF-Bonds}^{PLS-Grid}[CHF] + \Delta p_{EUR-Bonds}^{PLS-Grid}[CHF] + \dots + \Delta p_{USD-Bonds}^{PLS-Grid}[CHF]. \quad (3-100)$$

### Schritt 6: Ermittlung der G/V-Verteilung und des VaR

Abschliessend werden die G/V-Werte sortiert, worauf die Häufigkeitsverteilung und der gewünschte VaR ermittelt werden kann.<sup>31</sup>

Abbildung 3-23: Dichtefunktion der künstlichen G/V-Verteilung

$$\Delta p^{PLS-Grid}[CHF] = \left( \Delta p_1^{PLS-Grid}[CHF], \dots, \Delta p_{N^{MC}}^{PLS-Grid}[CHF] \right)$$



<sup>31</sup> Vgl. MC-Schritt 3: Anordnung der Resultate und Bestimmung des VaR, S. 38

### Kritische Anmerkungen

Das Beispiel hat gezeigt, wie mit der PLS-Grid-Methode der VaR eines umfangreichen Portfolios ermittelt werden kann. Bei der praktischen Anwendung müssen bei der Zusammensetzung der Marktfaktorblöcke und bei der Bestimmung der Anzahl der PLS-Faktoren die Besonderheiten des zu Grunde liegenden Portfolios berücksichtigt werden.

Angenommen, das Portfolio sei zur Hauptsache am USD-Kapitalmarkt und nur geringfügig am EUR-Kapitalmarkt investiert, so sollte die USD-Grid-G/V-Funktion  $\Delta P_{USD-Bonds}^{PLS-Grid} [USD]$  mit mehr PLS-Faktoren und Grid-Punkten modelliert werden als die entsprechende EUR-Grid-G/V-Funktion  $\Delta P_{EUR-Bonds}^{PLS-Grid} [EUR]$ .

Allerdings ist nicht immer eine eindeutige Zuordnung der Instrumente auf die Marktfaktorblöcke möglich. Dies wäre z.B. der Fall, wenn dem beschriebenen Bondportfolio eine EUR/CHF-Wechselkursoption hinzugefügt würde. Da die EUR/CHF-Wechselkursoption zugleich von den Marktfaktoren<sup>32</sup>

- CHF/EUR-Wechselkurs
- laufzeitgerechter CHF-Zins (Teil des Marktfaktorblocks "CHF-Zinskurve")
- laufzeitgerechter EUR-Zins (Teil des Marktfaktorblocks "EUR-Zinskurve")

abhängig ist, kann die Wechselkursoption nicht mehr eindeutig einem der bestehenden Marktfaktorblöcke zugeordnet werden.

Eine mögliche Lösung besteht darin, einen zusätzlichen Marktfaktorblock zu definieren, der neben dem Wechselkurs auch sämtliche Spotrates der CHF- und der EUR-Zinskurve umfasst.<sup>33</sup> Mit Hilfe der PLS-Methode kann dann wiederum die Dimensionalität des Marktfaktorblocks reduziert und darauf aufbauend eine weitere Grid-G/V-Funktion konstruiert werden.

Sind es lediglich einige wenige Instrumente, die sich den bestehenden Marktfaktorblöcken nicht zuordnen lassen, können deren G/V-Werte immer noch separat berechnet werden (z.B. durch Neubewertung, Delta- oder Delta-Gamma-Approximation). Es muss einzig sichergestellt sein, dass bei der separaten Berechnung dieselben Marktszenarien zu Grunde

<sup>32</sup> Vgl. z.B. das Bewertungsmodell einer Wechselkursoption von Garman/Kohlhagen(1983).

<sup>33</sup> Marktfaktorblöcke dürfen sich überschneiden, d.h. sie dürfen die selben Marktfaktoren besitzen. Die Instrumente hingegen müssen den Marktfaktorblöcken eindeutig zugeordnet sein.

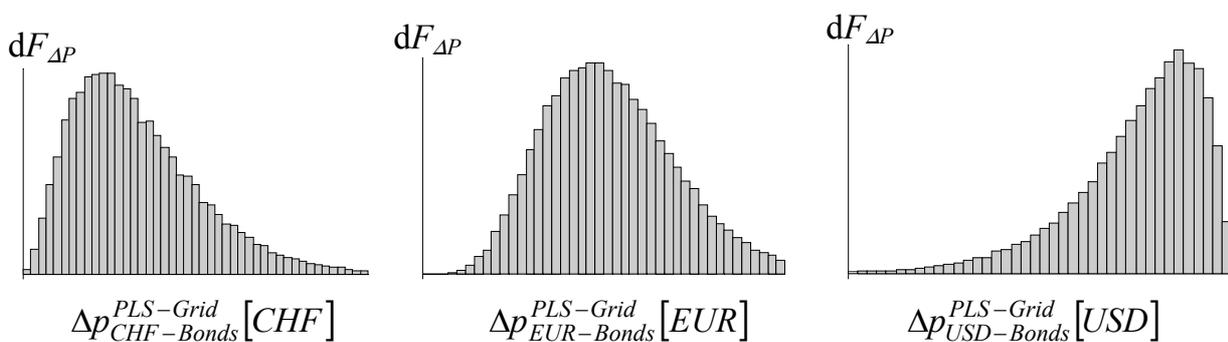
gelegt werden, damit die separat ermittelten G/V-Werte mit den G/V-Werten der Markt-faktorblöcke verknüpft werden können.

### Vorteile der Grid-MC-Methode

Der Hauptvorteil der Grid-MC-Methode gegenüber der Full-MC-Methode ist der verminderte Rechenaufwand.<sup>34</sup> Sind die Marktszenarien sowie die entsprechenden G/V-Vektoren ( $\Delta \mathbf{p}_{CHF-Bonds}^{PLS-Grid} [CHF], \dots, \Delta \mathbf{p}_{USD-Bonds}^{PLS-Grid} [USD]$ ) aber einmal berechnet und verfügbar, so hat die Grid-MC-Methode jedoch noch weitere Vorteile vorzuweisen.

Zum Beispiel lässt sich mit den vorhandenen Resultaten direkt das Marktrisiko auf Ebene der Markt-faktorblöcke analysieren, wie dies in Abbildung 3-24 dargestellt wird.

Abbildung 3-24: Analyse des Marktrisikos auf Ebene der Markt-faktorblöcke



Auch die Wirksamkeit einer Absicherungsmassnahme kann ohne grossen Rechenaufwand getestet werden. Wird z.B. erwogen, eine Zinsabsicherung im CHF-Geld/Kapitalmarkt vorzunehmen, so genügt es, die entsprechende Grid-Approximationsfunktion  $\Delta \mathbf{p}_{CHF-Bonds}^{PLS-Grid} [CHF]$  anzupassen,<sup>35</sup> den Szenario-Vektor  $\Delta \mathbf{p}_{IR-CHF}^{PLS-Grid} [CHF]$  aufgrund der bereits vorhandenen und gespeicherten Marktszenarien neu zu berechnen und ihn dann mit den übrigen schon vorhandenen Szenario-Vektoren zu kombinieren, um den neuen VaR zu bestimmen. Die Wirksamkeit der Absicherungsmassnahme kann dann z.B. beurteilt werden, indem der neue VaR-Wert mit dem alten verglichen wird.

Das hier dargestellte schematische Beispiel ist aber lediglich eine mögliche Form, wie die Grid-Technik auf umfangreiche Portfolios angewandt werden kann. Natürlich sind weitere Modelle denkbar.

<sup>34</sup> Vgl. Instrumentenrechenaufwände im Vergleich, S. 168

<sup>35</sup> Die G/V-Funktion wird sich aufgrund des neuen Zinsabsicherungsinstruments verändern.

### 3.7 Zusammenfassung

Mit der MC-Simulation können G/V-Verteilungsfunktion von Portfolios geschätzt werden, die mit traditionellen mathematischen Mitteln nicht mehr bestimmt werden können. Bei MC-Simulationen werden mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators eine Vielzahl unabhängiger Marktzustände künstlich hergestellt, um die Preisreaktionen des zu Grunde liegenden Portfolios zu beobachten. Je mehr "Was-wäre-wenn"-Szenarien durchgeführt werden, desto näher kommt die daraus abgeleitete künstliche G/V-Verteilung des Portfolios an die wahre Verteilung heran und desto genauer kann der VaR eingeschätzt werden.

In diesem Kapitel wurden MC-Methoden beschrieben, die durch geeignete G/V-Approximationen den Rechenaufwand der MC-Simulation verringern können. Die Delta- und die Delta-Gamma-Methode wenden hierzu Taylor-Approximationen an, während die PCA-Grid- und die PLS-Grid-Methode, wie der Name verrät, Grid-Approximationen einsetzen.

Wie das Anwendungsbeispiel Short-Caplet-Portfolio gezeigt hat, sind die Approximationsmethoden bei der Einschätzung des Risikos unterschiedlich erfolgreich. Beim Short-Caplet-Portfolio war der Approximationsfehler der Delta-Methode am grössten, da das Portfolio eine starke Krümmung aufwies. Aber auch die Delta-Gamma-Methode konnte die G/V-Funktion nicht korrekt abbilden, da die abnehmende Krümmung des Short-Caplet-Portfolios mit den ersten beiden Taylor-Termen nicht modelliert werden kann. Die Grid-Approximation war beim betrachteten Portfolio am erfolgreichsten.

Bei den Grid-Approximationen hängt der Approximationsfehler von der Anzahl der berücksichtigten Grid-Punkte und Faktoren ab. Je mehr Grid-Punkte und Faktoren im Grid-Modell einbezogen werden, desto genauer wird das Abbild der wahren G/V-Funktion, aber desto grösser ist auch der damit verbundene Rechenaufwand. Aus diesem Grund gilt es, die Anzahl notwendiger Erklärungsfaktoren mittels statistischer Verfahren auf ein Minimum zu begrenzen.

Bei der Reduktion der Faktoren muss aber stets darauf geachtet werden, dass die extrahierten Faktoren nicht einfach die Marktfaktordynamik per se replizieren, sondern dass sie die für das Portfolio risikoreichsten Marktfaktorbewegungen wiedergeben. Wie das Anwendungsbeispiel des Steepness-Bondportfolios gezeigt hat, beschreibt der erste PCA-Faktor nämlich nicht automatisch die risikoreichste Bewegung.

Bei der PLS-Grid-Methode werden deshalb die Preissensitivitäten des betrachteten Portfolios bei der Ermittlung der PLS-Faktoren miteinbezogen. Die PLS-Grid-Methode erfordert hierzu ein Pre-Calculatation-Datenset, das G/V-Werte für verschiedene Marktszenarien enthält.

Am Ende des Kapitels wurde anhand eines schematischen Beispiels aufgezeigt, wie die Grid-Approximationen auf grosse, umfangreiche Portfolios angewandt werden können, indem die im Portfolio enthaltenen Instrumente auf spezielle Subportfolios verteilt werden.

Hierfür werden zunächst eng miteinander in Beziehung stehende Marktfaktoren zu Marktfaktorblöcken zusammengefasst (z.B. Spotrates einer Zinskurve), so dass die Faktordimensionalität mittels der PCA-Methode oder der PLS-Methode auf Ebene der Marktfaktorblöcke nachhaltig reduziert werden kann. Für jeden Marktfaktorblock wird dann ein Subportfolio gebildet, das all diejenigen Instrumente enthält, die mit Hilfe der Marktfaktoren des Marktfaktorblocks in lokaler Währung bewertet werden können. Dabei müssen die Instrumente eindeutig den Marktfaktorblöcken zugeordnet sein.

Mit wenigen PCA- oder PLS-Faktoren können darauf die Grid-G/V-Funktionen der Subportfolios aufgestellt werden, die in der Summe die G/V-Funktion des Portfolios annähernd wiedergeben.

## ZWEITER TEIL

Während im ersten Teil die verschiedenen MC-Methoden vorgestellt wurden, werden sie nun in diesem Teil der Arbeit miteinander verglichen und zwar in Bezug auf ihren Rechenaufwand und die Genauigkeit ihrer Resultate. Beide Grössen spielen in der Praxis bei der Wahl einer geeigneten VaR-Methode eine wichtige Rolle. Die geeignete Methode hängt dabei erstens von der Komplexität der Instrumente im Portfolio und zweitens von deren Anzahl ab. Während die Komplexität Anforderungen hinsichtlich der Genauigkeit der Methode stellt, stellt die Anzahl der Instrumente Anforderungen hinsichtlich des notwendigen Rechenaufwands.

Mit einer speziell auf die Bedürfnisse dieser Untersuchung entwickelten Testumgebung werden die Genauigkeiten und die Rechenaufwände der MC-Methoden gemessen. Zu diesem Zweck wurden sämtliche MC-basierten VaR-Methoden, alle notwendigen Instrumentenbewertungsfunktionen, die Funktionen zur Marktdatenaufbereitung (*Bootstrapping*,<sup>36</sup> Kovarianzschätzung) und Fehlerkennzahlenberechnung in Mathematica programmiert. Mathematica wurde als Programmierplattform gewählt, weil es über eine umfangreiche Bibliothek mathematischer Funktionen verfügt.

Der zweite Teil beginnt mit Kapitel 4, das im Detail die Testumgebung beschreibt, in der die Genauigkeitsanalyse durchgeführt wird. Die Resultate der Genauigkeitsanalyse folgen in Kapitel 5, während in Kapitel 6 die Rechenaufwände der verschiedenen MC-Methoden untersucht werden. Schliesslich fasst das Kapitel 7 die Resultate der Genauigkeitsanalyse und der Aufwandsmessung auf Ebene der untersuchten Portfoliogruppen zusammen, woraus die Schlussfolgerungen der Arbeit abgeleitet werden.

---

<sup>36</sup> Vgl. 8.5 Ermittlung der überjährigen annualisierten stetigen Spotrates, S. 187

## 4 Messung der Genauigkeit MC-Methoden

Dieses Kapitel beschreibt die Testumgebung, in der die Genauigkeiten der ausgewählten MC-Methoden ermittelt werden. In Abschnitt 4.1 werden zunächst die Portfoliogruppen vorgestellt, an deren Beispiel die Genauigkeiten der Methoden getestet werden. Die Portfoliogruppen sind so gewählt, dass sie besondere G/V-Charakteristiken aufweisen. Abschnitt 4.2 beschreibt den Testablauf der Genauigkeitsanalyse.

Abschnitt 4.3 erläutert die den VaR-Berechnungen zu Grunde gelegten Marktdaten. Da alle Testportfolios lediglich Zinsinstrumente enthalten, handelt es sich bei den Marktdaten ausschliesslich um Zinsdaten verschiedener Währungen.

Als Referenzwerte zur Fehlermessung dienen die Resultate der Full-MC-Methode. Da diese aber selbst auch simulationsbedingte Schätzfehler aufweisen, wird ein Konfidenzintervall für den wahren VaR zum Konfidenzniveau von 95% angegeben. Abschnitt 4.4 zeigt, wie auf Basis der Theorie der Rangzahlen das Konfidenzintervall bestimmt werden kann.

In Abschnitt 4.5 werden drei Sichtweisen der Fehlermessung definiert. Es wird unter optimistischer, neutraler und pessimistischer Fehlermessung unterschieden, je nachdem, welcher VaR-Referenzwert zur Abweichungsanalyse herangezogen wird. In Abschnitt 4.6 wird aufgezeigt, wie die prozentuale VaR-Abweichung gemessen wird. Sämtliche ausgewählten Fehlerkennzahlen werden in Abschnitt 4.7 vorgestellt. Mit der Zusammenfassung der Testumgebung in Abschnitt 4.8 wird das Kapitel abgeschlossen.

## 4.1 Portfoliogruppen

Da sich die MC-Methoden lediglich in Bezug auf die Approximation der G/V-Funktion unterscheiden, werden bei den Genauigkeitstest Portfolios mit unterschiedlich komplizierten G/V-Funktionen verwendet. Da es in der einschlägigen VaR-Literatur keine geeigneten Testportfolios gab, welche den Bedürfnissen dieser Untersuchung entsprachen, wurden speziell für diesen Zweck Portfolios definiert, die einerseits archetypische G/V-Charakteristiken aufweisen<sup>37</sup> und andererseits die Schwachpunkte der VaR-Methoden aufdecken können.<sup>38</sup> Eine Übersicht der ausgewählten Portfoliogruppen gibt Tabelle 4-1.

Tabelle 4-1: Portfoliogruppen im Überblick

Portfoliogruppe	Instrumente	Position
<i>Portfoliotyp: Lineares Portfolio</i>		
Long-Bond-Portfolios	Zerobonds	Long
Long/Short-Bond-Portfolios	Zerobonds	Zufällig Long/Short
Hedged-Long/Short-Bond-Portfolios	Zerobonds	Zufällig Long/Short
<i>Portfoliotyp: Konvexes Portfolio</i>		
Short-Caplet/Floorlet-Portfolios	50% Caplets, 50% Floorlets	Short
<i>Portfoliotyp: Komplexes Portfolio</i>		
Digital-Option-Portfolios	Digital-Options	Zufällig Long/Short

Die detaillierten Spezifikationen der Portfoliogruppen sind jeweils den Testresultaten der Genauigkeitsanalyse vorangestellt.<sup>39</sup> Trotzdem soll schon an dieser Stelle ein kurzer Überblick gegeben werden, um das Konzept, das hinter den Portfoliogruppen steckt, zu verdeutlichen.

Gesamthaft werden fünf verschiedene Portfoliogruppen definiert. Drei Portfoliogruppen lassen sich dem Portfoliotyp "lineares Portfolio" zuordnen, eine dem "konvexen Portfolio" und eine dem "komplexen Portfolio". Allen Portfoliogruppen gemeinsam ist, dass sie ausschliesslich aus ausgewählten Zinsinstrumenten bestehen.

<sup>37</sup> Lineares, konvexes oder komplexes Portfolio. Vgl. 2.3.1 Portfoliotypen, S. 22

<sup>38</sup> Z.B. hat die PCA-Grid-Methode Schwierigkeiten bei der Risikomessung von Portfolios, die zugleich bedeutende Long- und Short-Positionen aufweisen. Vgl. PCA-Methode beim LSB-Portfolio, S. 131

<sup>39</sup> Details zur Zusammensetzung der verschiedenen Testportfolios sind jeweils dem Unterabschnitt "Testanordnung" der entsprechenden Portfoliogruppe zu entnehmen. Vgl. z.B. Testanordnung des Long-Bond-Portfolios, S. 120

Sämtliche Portfoliogruppen des Portfoliotyps "lineares Portfolio" setzen sich aus Zero-bonds zusammen.<sup>40</sup> Die Long-Bond-Portfolios (LB-Portfolio), bestehen, wie der Name verrät, ausschliesslich aus Long-Bond-Positionen<sup>41</sup> und reagieren zur Hauptsache auf parallele Zinsänderungen (Level-Faktor).

Die Portfolios der zweiten Gruppe, die Long/Short-Bond-Portfolios (LSB-Portfolio), enthalten zusätzlich Short-Bond-Positionen,<sup>42</sup> die dafür sorgen, dass die Preisreagibilität gegenüber alternativen Zinsbewegungen wie Steigungs- (Steepness-Faktor) oder Krümmungsbewegungen (Curvature-Faktor) zunimmt.

Die Hedged-Long/Short-Bond-Portfolios (HLSB-Portfolios) bestehen ebenfalls aus Long- und Short-Bond-Positionen, werden aber zusätzlich gegenüber parallelen Zinsänderungen abgesichert (Duration-Hedged), so dass sie vor allem auf Steigungs- und Krümmungsänderungen der Zinskurve reagieren.

Die Portfolios der vierten Gruppe, die Caplet/Floorlet-Portfolios (CF-Portfolios), repräsentieren die Kategorie "konvexe Portfolios". Sie bestehen aus Short-Caplet- und Short-Floorlet-Positionen. Dabei sind die Laufzeiten der Optionen speziell kurz gewählt, damit die Konvexitätseigenschaften der G/V-Funktion ausgeprägt hervortreten.

Die Digital-Option-Portfolios (DO-Portfolios) als fünfte und letzte Portfoliogruppe stehen stellvertretend für die Kategorie "komplexe Portfolios" und enthalten Long- und Short-Positionen in Digital-Optionen. Die Optionslaufzeiten sind ebenfalls sehr kurz angesetzt, um eine möglichst komplexe G/V-Funktion zu erhalten.

Den für die Testportfolios ausgewählten Instrumenten (Bonds, Caplets, Floorlets und Digital-Optionen) kommt keine besondere Bedeutung zu. Sie werden nur eingesetzt, um die gewünschten G/V-Charakteristiken der verschiedenen Portfoliotypen (linear, konvex, komplex) herzustellen und dienen somit lediglich als Mittel zum Zweck.

Die Intention, die hinter der Konstruktion der verschiedenen Testportfolios steckt, offenbart sich erst bei der Analyse der Genauigkeitsresultate. Trotzdem soll, ohne schon auf die detaillierten Ergebnisse einzugehen, vorweggenommen werden, dass durch den Einsatz der

---

<sup>40</sup> Preisänderungen von Bonds können bei geringen Zinsänderungen relativ exakt linear approximiert werden. Da bei den Genauigkeitsanalysen ausschliesslich VaR-Werte für kurze Halteperioden (1 und 10 Handelstage) berechnet werden, dienen die Bondportfolios deshalb als Vertreter der Kategorie "lineares Portfolio".

<sup>41</sup> "Long-Position" entspricht der Sicht eines Bondkäufers.

verschiedenartigen Portfoliotypen eine differenzierte Analyse der Stärken und Schwächen der VaR-Methoden ermöglicht wird. So zeigen die Resultate z.B., dass sich zwar das Risiko eines LB-Portfolios mit der PCA-Grid-Methode einwandfrei berechnen lässt, nicht aber das eines HLSB-Portfolios.

---

<sup>42</sup> "Short-Position" entspricht der Sicht eines Leerverkäufers.

## 4.2 Testablauf

Die Genauigkeitsanalyse wird für jede Portfoliogruppe einzeln durchgeführt. Durch Tests wird ermittelt, wie exakt die verschiedenen Methoden den VaR für LB-Portfolios,<sup>43</sup> LSB-Portfolios,<sup>44</sup> HLSB-Portfolios,<sup>45</sup> SCF-Portfolios,<sup>46</sup> und DO-Portfolios<sup>47</sup> bestimmen können.

Damit die Resultate der Genauigkeitsanalyse nicht von der Besonderheit eines willkürlich ausgewählten Testportfolios abhängig sind, wird der Genauigkeitstest einer Portfoliogruppe nicht mit einem einzelnen, sondern mit jeweils 100 verschiedenen Testportfolios durchgeführt. Die 100 Testportfolios werden dabei zufällig nach einem fest vorgegebenen Schema so zusammengestellt, dass sie die gruppenspezifische G/V-Charakteristik wiedergeben.

Aus demselben Grund werden bei den Tests nicht nur eine einzelne, sondern viele verschiedene Zinskurven eingesetzt. Die Zinskurven unterscheiden sich bezüglich Form (normal, invers, steil, flach) und Dynamik (Kovarianzen der Spotrates).<sup>48</sup>

Die Genauigkeitstests finden auf Ebene der Portfoliogruppen statt. Der Testablauf ist in Abbildung 4-1 schematisch dargestellt. Zunächst wird ein erstes Testportfolio gebildet und zufällig eine Zinssituation aus dem Zinskurvenset<sup>49</sup> ausgewählt. Danach wird der VaR des Testportfolios mit Hilfe der verschiedenen VaR-Methoden ermittelt und mit den VaR-Referenzwerten<sup>50</sup> verglichen. Nachdem die Abweichungen festgehalten wurden,<sup>51</sup> fängt der Prozess wieder von vorne an, indem ein zweites Testportfolio zusammengestellt und eine neue Zinskurve zu Grunde gelegt wird. Der Ablauf wird so lange wiederholt, bis die Abweichungsergebnisse aller 100 Testportfolios bekannt sind. Am Ende werden die Abweichungsergebnisse verwendet, um die Fehlerkennzahlen<sup>52</sup> der verschiedenen VaR-Methoden zu bestimmen.

---

<sup>43</sup> 5.1 Long-Bond-Portfolio, S. 120

<sup>44</sup> 5.2 Long/Short-Bond-Portfolio, S. 128

<sup>45</sup> 5.3 Hedged-Long/Short-Bond-Portfolio, S. 134

<sup>46</sup> 5.4 Short-Caplet/Floorlet-Portfolio, S. 140

<sup>47</sup> 5.5 Digital-Option-Portfolio, S. 145

<sup>48</sup> Details hierzu findet sich unter 4.3 Zinskurvensets, S. 108

<sup>49</sup> Vgl. 4.3 Zinskurvensets, S. 108

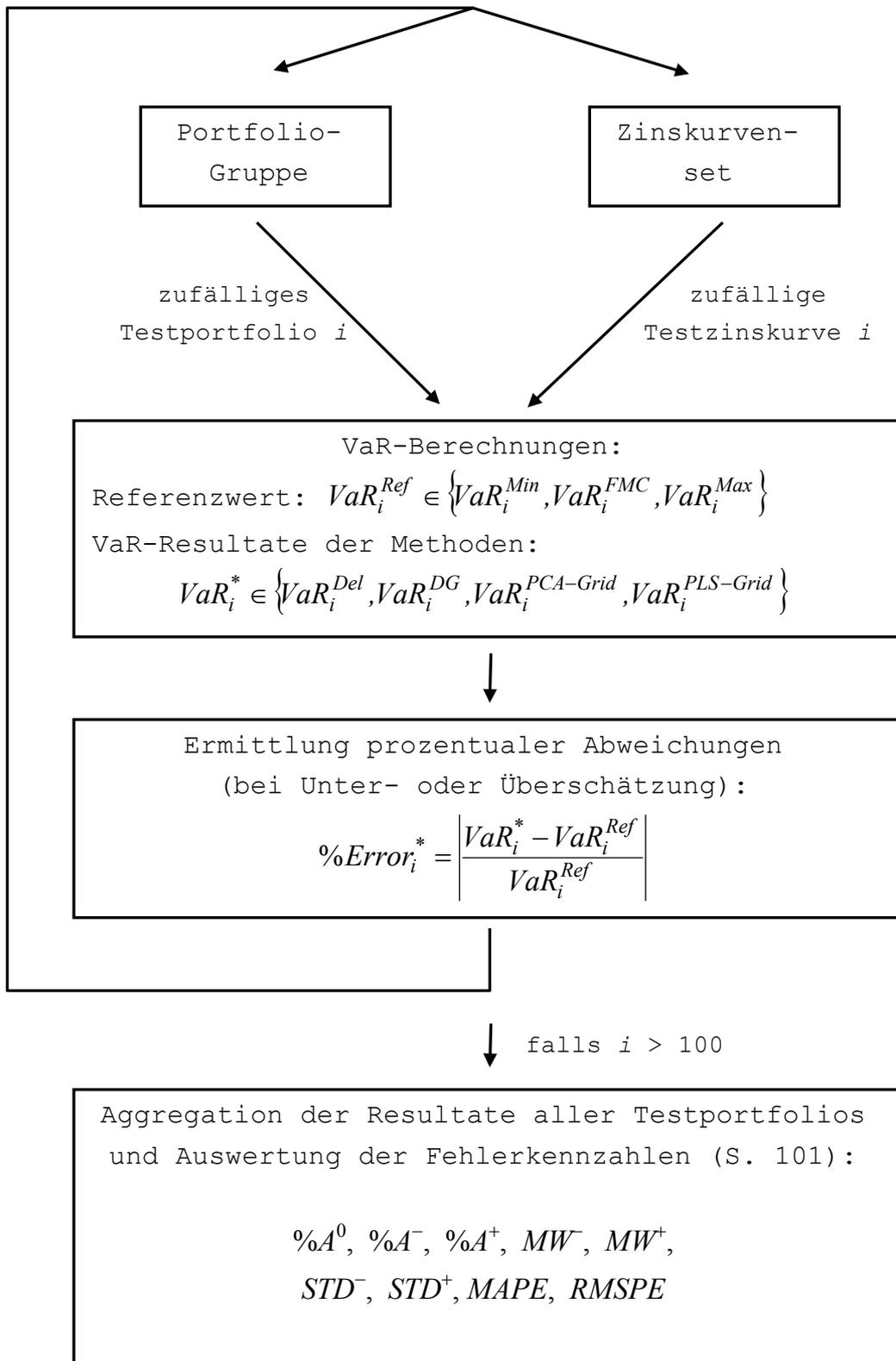
<sup>50</sup> Vgl. 4.5 VaR-Referenzwerte, S. 113

<sup>51</sup> Vgl. 4.6 Prozentuale Abweichung, S. 115

<sup>52</sup> Vgl. 4.7 Fehlerkennzahlen, S. 116

Abbildung 4-1: Testablauf

Der Prozess der Genauigkeitsanalyse beginnt bei  $i=1$  und wird so lange wiederholt, bis die VaR-Resultate der 100 zufällig zusammengestellten Testportfolios bekannt sind ( $i \leq 100$ ).



### 4.3 Zinskurvensets

Für den Genauigkeitstest steht jeweils ein Zinskurvenset mit einer Vielzahl von Zinskurven zur Verfügung. Da der VaR einerseits von Bondportfolios mit langfristigen Bonds und andererseits von Optionsportfolios mit kurzfristigen Optionen bestimmt werden soll, werden zwei Zinskurvensets bereitgestellt:

- Zinskurvenset "Bondportfolio"
- Zinskurvenset "Optionsportfolio"

Das Zinskurvenset "Bondportfolio" enthält Zinskurven mit Spotrates bis zu zehn Jahren und das Zinskurvenset "Optionsportfolio" Spotrates bis zu sechs Monaten.

#### 4.3.1 Zinskurvenset "Bondportfolio"

Jede Zinskurve des Zinskurvensets "Bondportfolio" wird durch zehn annualisierte stetige Spotrates  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, 10$ , unterschiedlicher Laufzeiten beschrieben (vgl. Tabelle 4-2).

Tabelle 4-2: Fristigkeiten der Spotrates des Zinskurvensets "Bondportfolio"

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	$X_{10}$
1M	3M	6M	12M	2J	3J	4J	5J	7J	10J
Unterjähriger Zinsbereich				Überjähriger Zinsbereich					

M = Monats-Spotrate; J = Jahres-Spotrate

Die Zinskurve lässt sich in einen *unterjährigen* und einen *überjährigen* Zinsbereich einteilen. Die Spotrates des unterjährigen Zinsbereichs (mit Fristigkeiten von einem bis zu zwölf Monaten) werden aus den Euromarktsätzen, die des überjährigen Zinsbereichs (von zwei bis zu zehn Jahren) aus den Swapsätzen errechnet.

Bei den Euromarktsätzen handelt es sich um *LIBOR*-Zinssätze,<sup>53</sup> die innerhalb des Interbankenhandel am Londoner Euro-Geldmarkt gelten. Die LIBOR-Sätze, die oft als Referenzsätze für Futures-, Options- und Swapkontrakte dienen, werden durch die British Bankers' Association festgelegt. Für den Zweck dieser Untersuchung werden die diskreten LIBOR-Sätze durch entsprechende Umformung in annualisierte stetige Spotrates umgewandelt.<sup>54</sup>

<sup>53</sup> LIBOR steht für London Interbank Offered Rate

Die Spotrates des überjährigen Zinsbereichs (von zwei bis zehn Jahren) werden aufgrund der hohen Liquidität des Marktes und der Verfügbarkeit der Daten aus den Swapsätzen berechnet.<sup>55</sup> Um auch im überjährigen Bereich annualisierte stetige Spotrates zu erhalten, werden diese rekursiv mit Hilfe des Bootstrap-Methode<sup>56</sup> hergeleitet.

Damit ein möglichst breites Spektrum an unterschiedlichen Zinskurven für die Genauigkeitsanalyse zur Verfügung steht, werden nach dem oben beschriebenen Verfahren die täglichen Zinskurven<sup>57</sup> für den zehnjährigen Zeitraum vom 03.01.1990 bis 03.01.2000 auf Basis der Euromarkt- und Swapsätze<sup>58</sup> hergeleitet und zwar für die Geld- und Kapitalmärkte der Währungen Schweizer Franken (CHF), Deutsche Mark (DEM), Japanischer Yen (JPY), Britisches Pfund (GBP) sowie US-Amerikanischer Dollar (USD).

Zur Berechnung des VaR benötigt man neben den Spotrates der Zinskurven auch die Kovarianzmatrix der Spotrateränderungen. Die Kovarianzmatrix wird mit Hilfe des Equally-Weighted-Moving-Average-Modell<sup>59</sup>, werden die täglichen absoluten Veränderungen der Spotrates über einen Zeitraum von jeweils einem Jahr<sup>60</sup> herangezogen.

Als Testzinskurven gelten alle Zinskurven ab dem 01.01.91 bis zum 03.01.2000. Dies ergibt pro Währung 2350 verschiedene Testzinskurven. Für jede Testzinskurve wird die entsprechende Testkovarianzmatrix ermittelt, indem jeweils die Spotrateränderungen des vorangegangenen Jahres bei der entsprechenden Kovarianzschätzung berücksichtigt werden.<sup>61</sup> So wird z.B. die Testkovarianzmatrix der Testzinskurve vom 01.01.91 auf der Grundlage der täglichen Zinsveränderungen des Zeitraums vom 03.01.90 bis 01.01.91 berechnet.<sup>62</sup>

Bei den Genauigkeitstests der Bondportfolios werden aus dem Zinskurvenset "Bondportfolio" zufällige Testzinskurven ausgewählt und bei der VaR-Berechnung zu Grunde gelegt, wobei jede Kurve die gleiche Wahrscheinlichkeit besitzt, ausgewählt zu werden.

---

<sup>54</sup> Vgl. Gleichung (8-5) im Anhang: 8.4 Ermittlung der unterjährigen annualisierten stetigen Spotrates, S. 187

<sup>55</sup> Alternativ kann die Zinsstruktur z.B. auch aus den Preisen von Bundesanleihen hergeleitet werden, falls der Markt über genügend hohe Liquidität verfügt. Vgl. McCulloch (1975); Chambers/Carleton/Waldman (1984)

<sup>56</sup> Vgl. 8.5 Ermittlung der überjährigen annualisierten stetigen Spotrates, S. 187

<sup>57</sup> Schlusskurse

<sup>58</sup> Alle Daten stammen von Datastream International, London

<sup>59</sup> Gleichmässige Gewichtung der beobachteten Renditen. Auch als einfache Kovarianzschätzung bezeichnet. Vgl. Alexander (1996), S. 235; Boudokh/Richardson/Whitelaw (1997), S. 64; RiskMetrics (1996), S. 75-100; Bosch (1998), S. 484

<sup>60</sup> Es wird unterstellt, dass ein Jahr 260 Datenpunkte umfasst.

<sup>61</sup> Man erhält somit die konditionierte Kovarianzmatrizen.

<sup>62</sup> In diesem Zeitraum liegen genau 260 Datenpunkte.

### 4.3.2 Zinskurvenset "Optionsportfolio"

Damit die charakteristischen nicht-linearen G/V-Funktionen der Optionsportfolios auch deutlich hervortreten, werden bei der Genauigkeitsanalyse ausschliesslich Optionen mit sehr kurzen Laufzeiten eingesetzt. Das bedingt, dass die entsprechenden Zinskurven speziell für den kurzfristigen Zinsbereich modelliert werden müssen. Als Stützstellen werden die zehn Spotrates mit folgenden Laufzeiten gewählt:

*Tabelle 4-3: Spotrates der kurzfristigen Zinskurve*

$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_9$	$X_{10}$
1T	1W	2W	3W	1M	2M	3M	4M	5M	6M

T = Tages-Spotrate; W = Wochen-Spotrate; M = Monats-Spotrate

Auch in diesem Fall werden die annualisierten stetigen Spotrates aus den diskreten Euromarktsätzen<sup>63</sup> gewonnen,<sup>64</sup> wobei als Datengrundlage die USD-Euromarktsätze dienen.<sup>65</sup> Die Datenreihe erstreckt sich über den fünfjährigen Zeitraum vom 04.01.1996 bis 04.01.2001. Die erste Testzinskurve datiert vom 01.01.1997 und die letzte vom 04.01.2001, was 1047 unterschiedlichen Testzinskurven ergibt. Die Schätzung der entsprechenden Testkovarianzen erfolgt analog zum Zinskurvenset "Bondportfolio".

Bei den Genauigkeitstests der Optionsportfolios<sup>66</sup> werden die Testzinskurven aus dem Zinskurvenset "Optionsportfolio" zufällig ausgewählt, wobei auch hier jede Kurve dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt, beim Test zum Einsatz zu kommen.

### 4.3.3 Verteilung des Risikovektors

Bei allen VaR-Berechnungen der Genauigkeitsanalysen wird unterstellt, dass der Risikovektor multivariat-normalverteilt ist, mit Erwartungswert  $\mathbf{0}$  und der entsprechenden Testkovarianzmatrix. Wird z.B. beim Testdurchlauf die CHF-Zinskurve vom 01.01.91 ausgewählt, so besitzt der Risikovektor die Testkovarianzmatrix, die sich auf der Grundlage der täglichen absoluten Zinsveränderungen des Zeitraums vom 03.01.90 bis 01.01.91 mit Hilfe der Equally-Weighted-Average-Modell ergibt.

<sup>63</sup> Daten von Datastream International, London.

<sup>64</sup> Vgl. 8.4 Ermittlung der unterjährigen annualisierten stetigen Spotrates, S. 187

<sup>65</sup> Nur im USD-Bereich waren Euromarktdaten für alle ausgewählten Fristigkeiten über den ausgewählten Zeitraum von fünf Jahren verfügbar.

<sup>66</sup> SCF-Portfolios und DO-Portfolios

#### 4.4 Konfidenzintervall für den wahren VaR

Als Benchmark für die Fehlermessung dienen die Resultate der Full-MC-Methode, da diese, im Gegensatz zu den übrigen Methoden, die G/V-Funktion eines Portfolios nicht approximiert. Wie bereits erwähnt, strebt die mittels Full-MC-Simulation geschätzte G/V-Verteilung  $F_{\Delta P}^{FMC}$  gegen die wahre G/V-Verteilung  $F_{\Delta P}$ , wenn die Anzahl unabhängiger Szenarien  $N^{MC}$  unendlich gross wird.<sup>67</sup> Selbiges gilt natürlich auch für die Schätzung des entsprechenden  $\alpha$ -Quantils,<sup>68</sup> das dem (negativen)  $VaR(1-\alpha)$  entspricht. Da aber die Anzahl MC-Szenarien  $N^{MC}$  zwar sehr gross, aber niemals unendlich gross gewählt werden kann, ist der resultierende Full-MC-VaR ( $VaR^{FMC}$ ) selbst nur eine Schätzung. Mit Hilfe der Theorie der Ranggrössen<sup>69</sup> ist es aber möglich, für das gesuchte  $\alpha$ -Quantil  $F_{\Delta P}^{-1}(\alpha)$  ein zentrales zweiseitiges Konfidenzintervall anzugeben.

Werden die durch MC-Simulation gefundenen G/V-Werte der Grösse nach geordnet

$$\Delta p_{(1)} < \Delta p_{(2)} < \dots < \Delta p_{(m)} < \dots < \Delta p_{(n)} < \dots < \Delta p_{(N^{MC})}, \quad (4-1)$$

dann können die Rangzahlen  $m$  und  $n$  so bestimmt werden, dass das entsprechende Intervall  $[\Delta p_{(m)}, \Delta p_{(n)}]$  den (negativen) wahren VaR ("VaR(1- $\alpha$ )", bzw. " $F_{\Delta P}^{-1}(\alpha)$ ") symmetrisch mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% umschliesst:

$$\Pr(\Delta p_{(m)} \leq F_{\Delta P}^{-1}(\alpha) \leq \Delta p_{(n)}) \geq 95\%. \quad (4-2)$$

Bei genügend grosser Anzahl MC-Szenarien  $N^{MC}$  lassen sich  $m$  und  $n$  approximativ gemäss<sup>70</sup>

$$m = \left\lfloor N^{MC} \cdot \alpha - z_{97.5\%} \cdot \sqrt{N^{MC} \cdot \alpha \cdot (1-\alpha)} \right\rfloor + 1, \quad \text{bzw.}$$

$$n = \left\lfloor N^{MC} \cdot \alpha + z_{97.5\%} \cdot \sqrt{N^{MC} \cdot \alpha \cdot (1-\alpha)} \right\rfloor + 1, \quad (4-3)$$

<sup>67</sup> Nach dem Satz von Glivenko. Vgl. Fisz (1978), S. 456 oder Bosch (1998), S. 331

<sup>68</sup> Der Beweis findet sich bei Fisz (1978), S. 441

<sup>69</sup> Auch als Ordnungsstatistik bezeichnet (engl. Order Statistics). Vgl. Bosch (1998), S. 682 ff.

<sup>70</sup> Faustregel:  $\alpha(1-\alpha)N^{MC} > 9$ . Vgl. Hartung (1999), S. 236; Bosch (1998), S. 708

ermitteln, wobei  $z_{97.5\%} \approx 1.96$  das 97.5%-Quantil der Standardnormalverteilung und  $\lfloor \cdot \rfloor$  den ganzzahligen Anteil des Klammerausdrucks (Integer) bezeichnet.

#### 4.4.1 Beispiel zur Berechnung des Konfidenzintervalls

Angenommen, die Anzahl der MC-Szenarien betrage  $N^{MC} = 100'000$  und man suche das zentrale zweiseitige Konfidenzintervall für den  $VaR(99\%)$  (d.h.  $\alpha = 1\%$ ) zum Konfidenzniveau von 95%, so bestimmen sich die entsprechenden Rangzahlen,  $m$  und  $n$  gemäss

$$m = \left\lfloor 100'000 \cdot 1\% - 1.96 \cdot \sqrt{100'000 \cdot 1\% \cdot 99\%} \right\rfloor + 1 = 939,$$

$$n = \left\lfloor 100'000 \cdot 1\% + 1.96 \cdot \sqrt{100'000 \cdot 1\% \cdot 99\%} \right\rfloor + 1 = 1'062.$$

Der  $VaR(99\%)$  liegt somit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% innerhalb des Konfidenzintervalls  $[-\Delta p_{(1062)}, -\Delta p_{(939)}]$ .<sup>71</sup>

In der Tabelle 4-4 werden die Rangzahlen zentraler zweiseitiger Konfidenzintervalle für den  $VaR(95\%)$ , bzw. den  $VaR(99\%)$  zum Konfidenzniveau vom 95% angegeben, und zwar jeweils für unterschiedlich viele MC-Szenarien.<sup>72</sup>

Tabelle 4-4: Rangzahlen zentraler zweiseitiger Konfidenzintervalle zum Konfidenzniveau von 95%

Anzahl Szenarien	Value at Risk 95% ( $\alpha=5\%$ )		Value at Risk 99% ( $\alpha=1\%$ )	
	$m$	$N$	$M$	$N$
1'000	37	64	4	17
10'000	458	543	81	120
100'000	4'865	5'136	939	1'062
1'000'000	49'573	50'428	9'805	10'196

<sup>71</sup> Der mit der Rangzahl  $m$  verbundene Verlust ist grösser, als jener der Rangzahl  $n$ . Deshalb bezeichnet  $-\Delta p(m)$  die obere Grenze des Intervalls.

<sup>72</sup> Vgl. Pritsker (1996), S. 20

#### 4.5 VaR-Referenzwerte

Da  $VaR^{FMC}$  eine Schätzung ist, werden zur Fehlermessung, in Anlehnung an die Arbeit von Pritsker (1996), zusätzlich die Grenzen des Konfidenzintervalls miteinbezogen, indem definiert wird, dass

$$VaR^{Min} = -\Delta p_{(n)} \quad ; \quad VaR^{Max} = -\Delta p_{(m)}. \quad (4-4)$$

Der wahre VaR liegt demnach mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% zwischen  $VaR^{Min}$  und  $VaR^{Max}$ . Dabei bezeichnet  $VaR^{Min}$  die untere und  $VaR^{Max}$  die obere Grenze, so dass gilt

$$VaR^{Min} \leq VaR^{FMC} \leq VaR^{Max}. \quad (4-5)$$

Liegt der  $VaR^*$  der \*-Methode<sup>73</sup> innerhalb des Konfidenzintervalls  $[VaR^{Min}, VaR^{Max}]$ ,

$$VaR^{Min} \leq VaR^* \leq VaR^{Max}, \quad (4-6)$$

so wird er als exakt berechnet angenommen. Liegt er hingegen ausserhalb des Intervalls, so wird er mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% falsch eingeschätzt. Unberücksichtigt bleibt aber, dass die Resultate der verschiedenen VaR-Methoden selbst auf MC-Simulationen beruhen und deshalb auch von Approximationsfehlern betroffen sind.

Kommt es zu einer Über- oder Unterschätzung, so wird die Abweichung vom VaR-Referenzwert  $VaR^{Ref}$  festgestellt, wobei

$$VaR^{Ref} \in \{VaR^{Min}, VaR^{FMC}, VaR^{Max}\}. \quad (4-7)$$

Als Referenzwert dient entweder  $VaR^{Min}$ ,  $VaR^{FMC}$  oder  $VaR^{Max}$ , je nachdem, ob eine optimistische (*opt*), neutrale (*neut*) oder pessimistische (*pess*) Fehlereinschätzung vorgenommen wird.

Wenn der  $VaR^*$  über dem  $VaR^{Max}$  liegt, so beträgt die Abweichung unter optimistischer Fehlereinschätzung  $Error_{opt} = |VaR^* - VaR^{Max}|$ , wohingegen die Abweichung unter neutra-

<sup>73</sup> Mit \*-Methode wird eine beliebige VaR-Methode bezeichnet, z.B. Delta-, Delta-Gamma-, PCA-Grid- oder PLS-Grid-Methode.

ler  $Error_{neut} = |VaR^* - VaR^{FMC}|$ , bzw. pessimistischer Sichtweise  $Error_{pess} = |VaR^* - VaR^{Min}|$  beträgt. Analog beträgt die Abweichung, wenn der  $VaR^*$  unter dem  $VaR^{Min}$  liegt, unter optimistischer Sichtweise  $|VaR^* - VaR^{Min}|$  und unter pessimistischer Sichtweise  $|VaR^* - VaR^{Max}|$ . Dieser Zusammenhang ist in Abbildung 4-2 dargestellt.

Abbildung 4-2: Fehlermessung unter verschiedenen Sichtweisen

VaR-Referenzwert		$VaR^{Min}$	$VaR^{FMC}$	$VaR^{Max}$
Wahrscheinlichkeit		<-2.5%->	<- 95% ->	<-2.5%->
1. Fall: Unterschätzung $VaR^* < VaR^{Min}$	$Error_{opt}$ $Error_{neut}$ $Error_{pess}$			
2. Fall: Exakte Berechnung $VaR^{Min} < VaR^* < VaR^{Max}$	No Error			
3. Fall: Überschätzung $VaR^{Max} < VaR^*$	$Error_{opt}$ $Error_{neut}$ $Error_{pess}$			$VaR^*$

#### 4.6 Prozentuale Abweichung

Da bei den Genauigkeitsanalysen verschiedene Testportfolios eingesetzt werden, die unterschiedlich hohe VaR-Werte aufweisen, wird, damit ein Vergleich der Resultate der unterschiedlichen Testportfolios ermöglicht wird, nicht die absolute Abweichung vom Referenz-VaR, sondern die prozentuale Abweichung (*%Error*) gemessen. Diese berechnet sich, je nach Sichtweise, gemäss

$$\begin{aligned} \%Error_{opt} &= \inf \left\{ \left| \frac{VaR^* - VaR^{Ref}}{VaR^{Ref}} \right| ; VaR^{Ref} \in \{VaR^{Min}, VaR^{FMC}, VaR^{Max}\} \right\}, \\ \%Error_{neut} &= \left| \frac{VaR^* - VaR^{FMC}}{VaR^{FMC}} \right|, \\ \%Error_{pess} &= \sup \left\{ \left| \frac{VaR^* - VaR^{Ref}}{VaR^{Ref}} \right| ; VaR^{Ref} \in \{VaR^{Min}, VaR^{FMC}, VaR^{Max}\} \right\} \end{aligned} \quad (4-8)$$

#### 4.7 Fehlerkennzahlen

Nachdem die VaR-Resultate sämtlicher Testportfolios bekannt und die entsprechenden Abweichungen festgestellt sind, werden die Fehlerkennzahlen der VaR-Methoden für jede Portfoliogruppe berechnet.

Zu den Fehlerkennzahlen gehören  $\%A^0$ ,  $\%A^-$  und  $\%A^+$ , die definiert sind als:

$\%A^0$ : Prozentualer Anteil der exakt berechneten VaR-Resultate. Für ein exakt berechnetes Resultat gilt  $VaR_i^* \in [VaR_i^{Min}, VaR_i^{Max}]$ . Liegen z.B. die VaR-Resultate einer MC-Methode bei 60 von 100 Testportfolios innerhalb des Konfidenzintervalls, so beträgt  $\%A^0 = 60\%$ .

$\%A^-$ : Prozentualer Anteil der unterschätzten VaR-Resultate. Für ein unterschätztes Resultat gilt  $VaR_i^* < VaR_i^{Min}$ .

$\%A^+$ : Prozentualer Anteil der überschätzten VaR-Resultate. Für ein überschätztes Resultat gilt  $VaR_i^* > VaR_i^{Max}$ .

Zusätzlich werden mit Hilfe der Gleichung (4–8) die durchschnittlichen prozentualen Abweichungen aller unter- bzw. überschätzten VaR-Resultate sowie deren Standardabweichung berechnet:

$MW^-$ : (Betragsmässiger) Durchschnitt der prozentualen VaR-Unterschätzungen

$STD^-$ : Standardabweichung der prozentualen VaR-Unterschätzungen

$MW^+$ : (Betragsmässiger) Durchschnitt der prozentualen VaR-Überschätzungen

$STD^+$ : Standardabweichung der prozentualen VaR-Überschätzungen

Keine Differenzierung zwischen Unter- und Überschätzung machen die Fehlerkennzahlen "Mean Absolute Percentage Error" ( $MAPE$ )

$$MAPE = (MW^- \cdot \%A^- + MW^+ \cdot \%A^+) \quad (4-9)$$

sowie "Root Mean Squared Percentage Error" (*RMSPE*)<sup>74</sup>

$$RMSPE = \sqrt{\left( \left( MW^- \right)^2 + \left( STD^- \right)^2 \right) \cdot \%A^- + \left( \left( MW^+ \right)^2 + \left( STD^+ \right)^2 \right) \cdot \%A^+}, \quad (4-10)$$

die ebenfalls bei der Fehleranalyse miteinbezogen werden.<sup>75</sup>

---

<sup>74</sup> Zwar sind sich die beiden Kennzahlen sehr ähnlich, jedoch reagiert der *RMSPE* empfindlicher auf Ausreisser als der *MAPE*.

<sup>75</sup> Beim *MAPE* und beim *RMSPE* werden ausschliesslich diejenigen VaR-Abweichungen berücksichtigt, die ausserhalb Konfidenzintervalls [ $VaR^{Min}$ ,  $VaR^{Max}$ ] liegen. Vgl. Pritsker (1996), S. 36

## 4.8 Zusammenfassung

In Kapitel 4 wurde die Testumgebung der Genauigkeitsanalyse beschrieben. Die Genauigkeit der MC-Methoden wird anhand unterschiedlicher Portfoliogruppen, die spezifische G/V-Funktionen aufweisen, gemessen. Pro Portfoliogruppe werden nach einem fest vorgegebenen Schema zufällige Testportfolios zusammengestellt. Für jedes Testportfolio wird ebenfalls zufällig eine Zinskurve aus dem entsprechenden Zinskurvenset ausgewählt, die dann als Marktdatenbasis zur VaR-Berechnung dient.

Mit den verschiedenen MC-Methoden werden danach die VaR-Werte der Testportfolios berechnet und die prozentualen Abweichungen gegenüber den VaR-Referenzwerten festgestellt. Als Referenzwerte dienen die Resultate der Full-MC-Methode. Da diese selbst Approximationsfehlern ausgesetzt ist, wird zusätzlich für den wahren VaR ein Konfidenzintervall zu einem Konfidenzniveau von 95% angegeben, so dass die Fehlermessung unter optimistischer, neutraler und pessimistischer Sichtweise durchgeführt werden kann. Auf der Basis der Abweichungsergebnisse werden schliesslich die Fehlerkennzahlen pro Portfoliogruppe quantifiziert.

## 5 Resultate der Genauigkeitsanalyse

Das folgende Kapitel stellt die Resultate der Genauigkeitsanalyse vor. Jeder Abschnitt fasst die Resultate auf Ebene der Portfoliogruppe zusammen. Dabei sind die Abschnitte so aufgebaut, dass jeweils zunächst die Spezifikation der Testportfolios beschrieben wird und im Anschluss daran die Testresultate der entsprechenden Genauigkeitsanalyse folgen. Tabelle 5-1 gibt eine Übersicht über die Anordnung der Testresultate.

*Tabelle 5-1: Anordnung der Resultate der getesteten Portfoliogruppen*

<b>Portfoliogruppe</b>	<b>Portfoliotyp</b>
5.1 LB-Portfolio	Lineares Portfolio
5.2 LSB-Portfolio	Lineares Portfolio
5.3 HLSB-Portfolio	Lineares Portfolio
5.4 SCF-Portfolio	Konvexes Portfolio
5.5 DO-Portfolio	Komplexes Portfolio

In Abschnitt 5.6 wird die Genauigkeit alternativer PLS-Grid-Modelle getestet. Einerseits wird der Grid mit einer unterschiedlichen Anzahl Grid-Punkte erstellt und andererseits wird betrachtet, wie sich die Art und die Anzahl der Pre-Calculations auf die Genauigkeit der PLS-Grid-Methode auswirken. Abschnitt 5.7 schliesst das Kapitel mit der Zusammenfassung der Testresultate ab.

## 5.1 Long-Bond-Portfolio

### 5.1.1 Testanordnung des LB-Portfolios

Beim LB-Portfolio werden die Testportfolios aus Long-Positionen in *Zerobonds* aufgebaut.<sup>76</sup> Jedes Testportfolio besteht aus zehn Zerobonds, deren Restlaufzeiten genau mit den Fristigkeiten der zehn Spotrates der Zinskurve zusammenfallen. Die Nominalwerte der zehn Zerobonds werden für jedes Testportfolio zufällig bestimmt und liegen gleichverteilt zwischen einer und zehn Millionen GE (vgl. Tabelle 5-2).

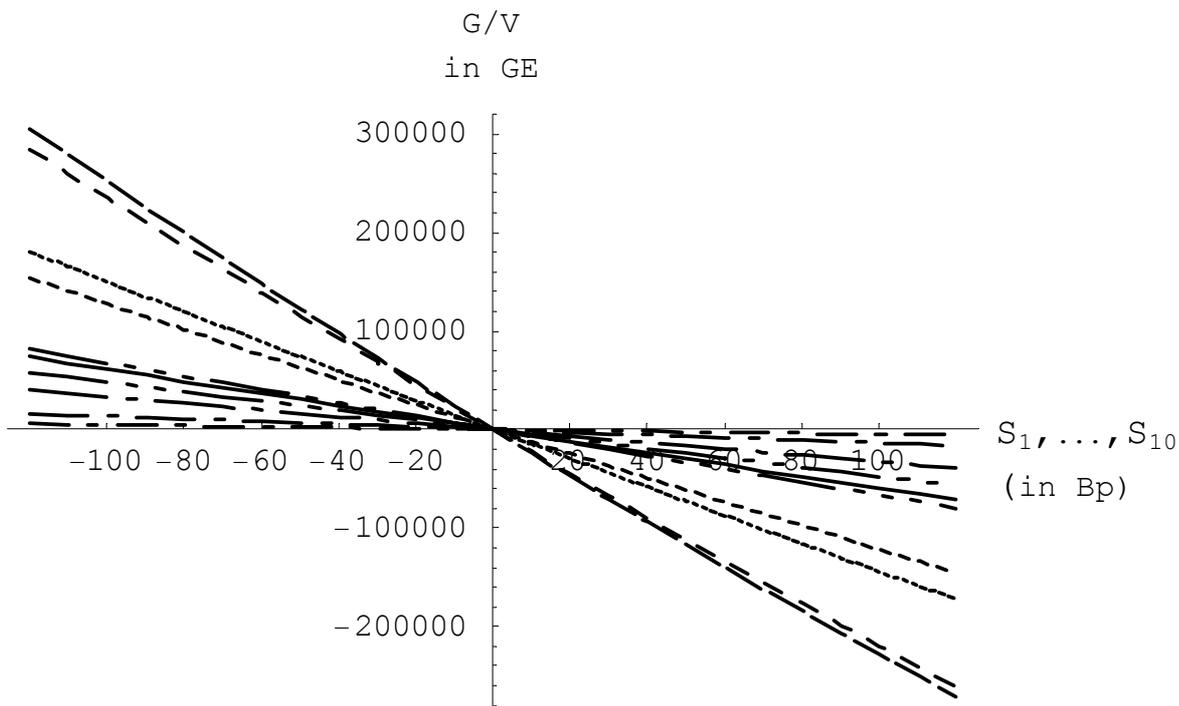
Tabelle 5-2: Zusammensetzung des LB-Portfolios

Zufälliger Nominalwert*	Position	Restlaufzeit	fristgerechte Spotrate
1-10 Mio. GE	Long	1 Monat	1-Monats-Spotrate
1-10 Mio. GE	Long	3 Monate	3-Monats-Spotrate
1-10 Mio. GE	Long	6 Monate	6-Monats-Spotrate
1-10 Mio. GE	Long	1 Jahr	1-Jahres-Spotrate
1-10 Mio. GE	Long	2 Jahre	2-Jahres-Spotrate
1-10 Mio. GE	Long	3 Jahre	3-Jahres-Spotrate
1-10 Mio. GE	Long	4 Jahre	4-Jahres-Spotrate
1-10 Mio. GE	Long	5 Jahre	5-Jahres-Spotrate
1-10 Mio. GE	Long	7 Jahre	7-Jahres-Spotrate
1-10 Mio. GE	Long	10 Jahre	10-Jahres-Spotrate

\*Zufälliger Nominalwert. Gleichverteilt zwischen 1 und 10 Millionen GE

Das Portfolio reagiert beinahe linear auf kleine Spotrateveränderungen, wie die in Abbildung 5-1 dargestellte G/V-Funktion eines zufällig ausgewählten Testportfolios zeigt.

<sup>76</sup> Gemäss dem Prinzip des Cash-Flow-Mappings von RiskMetrics kann jedes beliebige Bondportfolio zur Berechnung des VaR approximativ anhand eines risikoäquivalenten Zerobondportfolios abgebildet werden (vgl. RiskMetrics (1996), S.117-121). Anstatt zufällige Bondportfolios zusammenzustellen, um danach die Cash-Flows auf die entsprechenden Spotrates (Marktfaktoren) zu verteilen, werden beim Test die zufälligen Cash-Flows (Zerobonds) direkt den Spotrates zugeordnet.

Abbildung 5-1: G/V-Funktion des LB-Portfolios<sup>77</sup>

Bei allen VaR-Methoden werden jeweils 100'000 MC-Szenarien durchgeführt. Als Marktdaten dienen die Testzinskurven des Zinskurvensets "Bondportfolio".

### 5.1.2 Testresultate des LB-Portfolios

In einem ersten Schritt wird die Genauigkeitsanalyse separat auf Ebene der einzelnen Währungen (CHF, DEM, GBP, JPY, USD) durchgeführt, um festzustellen, ob die Genauigkeit der Methoden von währungsspezifischen Zinsbewegungen beeinflusst wird. Pro Währung werden zufällig 100 Testzinskurven ausgewählt sowie 100 zufällige Testportfolios aus Long-Positionen in Zerobonds zusammengestellt.

Berechnet man den eintägigen  $VaR(99\%)$  für das LB-Portfolio, so erhält man die in der Tabelle 5-3 wiedergegebenen währungsspezifischen Fehlerkennzahlen.<sup>78</sup>

<sup>77</sup> Illustratives Beispiel. Die Linien wiedergeben den Gewinn/Verlust-Verlauf des Portfolios in Abhängigkeit der zehn Marktfaktoren.

<sup>78</sup> Unter neutraler Fehlerbetrachtungweise, d.h.  $VaR^{FMC}$  dient als Referenz-VaR. Vgl. 4.6 Prozentuale Abweichung, S. 115

Tabelle 5-3: Fehleranalyse\* auf Währungsebene (eintägiger VaR(99%); LB-Portfolio)

	CHF		DEM		JPY		GBP		USD	
	MAPE in %	RMSPE in %								
Delta	0.3	0.7	0.2	0.4	0.3	0.7	0.3	0.7	0.3	0.6
DG	0.2	0.4	0.1	0.3	0.3	0.6	0.3	0.6	0.2	0.4
PCA-1	5.6	6.0	2.9	3.4	4.6	5.0	3.3	3.6	2.1	2.5
PCA-2	0.6	1.0	0.7	1.2	0.8	1.2	0.5	0.8	0.4	0.8
PCA-3	0.4	0.7	0.4	0.8	0.6	1.0	0.4	0.7	0.3	0.7
PCA-4	0.4	0.7	0.3	0.6	0.3	0.7	0.3	0.6	0.3	0.6
PCA-5	0.3	0.6	0.2	0.5	0.3	0.6	0.2	0.5	0.2	0.6
PCA-6	0.3	0.6	0.2	0.5	0.3	0.6	0.2	0.5	0.2	0.6
PCA-7	0.3	0.6	0.2	0.5	0.3	0.6	0.2	0.5	0.2	0.6
PLS-1	3.1	4.2	2.5	3.5	3.2	4.1	2.5	3.5	2.5	3.3
PLS-2	2.8	3.7	2.4	3.3	2.8	3.6	2.3	3.2	2.4	3.1
PLS-3	2.8	3.7	2.4	3.3	2.8	3.6	2.3	3.2	2.4	3.2
PLS-4	2.8	3.7	2.4	3.3	2.8	3.7	2.3	3.2	2.4	3.2
PLS-5	2.9	3.7	2.4	3.3	2.8	3.6	2.3	3.2	2.4	3.2
PLS-6	2.9	3.7	2.4	3.3	2.8	3.6	2.3	3.2	2.4	3.2
PLS-7	2.9	3.7	2.4	3.3	2.8	3.6	2.3	3.2	2.4	3.2

\*Unter neutraler Fehlereinschätzung:  $MAPE_{neut}$ , bzw.  $RMSPE_{neut}$

Die Abkürzungen der Methoden (Delta, DG, PCA-1, PCA-2 usw.) finden sich im entsprechenden Abkürzungsverzeichnis.<sup>79</sup>

Die Testresultate aus Tabelle 5-3 deuten darauf hin, dass die Genauigkeiten der VaR-Methoden kaum von währungsspezifischer Zinsdynamik betroffen sind. Einzig die PCA-Grid-Methode mit einem PCA-Faktor (PCA-1) reagiert unterschiedlich auf Zinskurven verschiedener Währungen. Während der  $MAPE$  bei der PCA-1-Methode bei den CHF-Testportfolios bei 5.6% liegt, beträgt er beim entsprechenden USD-Testportfolio lediglich 2.1%. Das heisst konkret, dass die Zinsrisiken im USD-Bereich mit nur einem PCA-Faktor genauer beschrieben werden können als die Zinsrisiken im CHF-Bereich.<sup>80</sup> Wird bei der PCA-Grid-Methode zusätzlich der zweite Faktor mitberücksichtigt, so sind die währungsspezifischen Genauigkeitsunterschiede nicht mehr so ausgeprägt.

Die PLS-Methode mit einem Faktor (PLS-1) reagiert zwar auch auf Währungen, aber in geringerem Ausmass. Den grössten  $MAPE$  von 3.2% verzeichnet die PLS-1-Methode im japanischen Geld-/Kapitalmarkt, gefolgt vom schweizerischen mit 3.1%, während an den übrigen Märkten ein  $MAPE$  von 2.5% gemessen wird. Auch hier führt die Berücksichti-

<sup>79</sup> Vgl. entsprechendes Verzeichnis im vorderen Teil der Arbeit, S. xxi

<sup>80</sup> Eine mögliche Interpretation wäre folgende: Die risikoreichste Bewegung für das LB-Portfolio ist die Parallelbewegung. Aber gerade diese Bewegung wird, im Gegensatz zu den meisten empirischen Beobachtungen, bei der CHF-Zinskurve (über den Zeitraum 1990-2000) nicht primär durch den ersten PCA-Faktor beschrieben. Dieses "Phänomen" wurde auch in der statistischen Untersuchung der CHF-Zinskurve über den Zeitraum 1988-1996 von Bühler/Zimmermann (1996), S. 66, beobachtet.

gung des zweiten PLS-Faktors zu einer Nivellierung der Resultate über die Währungen hinweg.

In einem zweiten Schritt werden sämtliche Resultate der verschiedenen Währungen zusammengefasst. Als Datengrundlage für die weiteren Auswertungen dienen somit die Abweichungsergebnisse alle 500 Testportfolios (fünf Zinsländer mit je 100 Testportfolios).

Die Genauigkeit der Methoden wird anhand folgender VaR-Kennzahlen untersucht:

- *eintägiger VaR(95%)*
- *eintägiger VaR(99%)*
- *zweiwöchiger<sup>81</sup> VaR(95%)*
- *zweiwöchiger VaR(99%)*

In der Tabelle 5-4 sind die Fehlerkennzahlen der VaR-Methoden für die Berechnung des *eintägigen VaR(99%)* wiedergegeben. Die übrigen Testresultate finden sich im Anhang.<sup>82</sup>

---

<sup>81</sup> Entspricht einer Haltedauer von 10 Handelstagen

<sup>82</sup> Tabelle 9-1: Eintägiger VaR(95%) des LB-Portfolios, S.196  
Tabelle 9-2: Zweiwöchiger VaR(95%) des LB-Portfolios, S.197  
Tabelle 9-3: Zweiwöchiger VaR(99%) des LB-Portfolios, S. 197

Tabelle 5-4: Eintägiger VaR(99%) des LB-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> In %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	0.3	0.2	3	0.4	0.4	16	0.1	0.3	81
	neut	1.3	0.2	3	1.4	0.5	16	0.3	0.6	81
	peess	2.3	0.3	3	2.4	0.5	16	0.5	1.5	81
Delta-Gamma	opt	0.2	0.2	9	0.3	0.3	8	0.1	0.2	83
	neut	1.2	0.3	9	1.4	0.4	8	0.2	0.5	83
	peess	2.2	0.3	9	2.3	0.4	8	0.4	0.9	83
PCA-1	opt	3.0	2.0	93	0.0	0.0	0	2.8	3.5	7
	neut	4.0	2.0	93	0.0	0.0	0	3.7	4.3	7
	peess	4.9	2.0	93	0.0	0.0	0	4.6	5.1	7
PCA-2	opt	0.7	0.6	34	0.3	0.2	3	0.2	0.5	63
	neut	1.6	0.6	34	1.3	0.2	3	0.6	1.0	63
	peess	2.6	0.6	34	2.3	0.2	3	0.9	1.6	63
PCA-3	opt	0.5	0.4	24	0.4	0.2	3	0.1	0.3	73
	neut	1.4	0.5	24	1.3	0.2	3	0.4	0.8	73
	peess	2.4	0.5	24	2.3	0.3	3	0.7	1.3	73
PCA-4	opt	0.4	0.3	17	0.4	0.3	4	0.1	0.2	79
	neut	1.3	0.3	17	1.3	0.3	4	0.3	0.6	79
	peess	2.3	0.3	17	2.3	0.3	4	0.5	1.1	79
PCA-5	opt	0.4	0.3	13	0.3	0.3	5	0.1	0.2	82
	neut	1.3	0.3	13	1.3	0.3	5	0.2	0.6	82
	peess	2.3	0.3	13	2.3	0.3	5	0.4	1.0	82
PCA-6	opt	0.4	0.3	12	0.3	0.3	6	0.1	0.2	82
	neut	1.3	0.3	12	1.3	0.3	6	0.2	0.6	82
	peess	2.3	0.3	12	2.3	0.3	6	0.4	1.0	82
PCA-7	opt	0.3	0.3	12	0.3	0.3	6	0.1	0.2	82
	neut	1.3	0.3	12	1.3	0.3	6	0.2	0.6	82
	peess	2.2	0.3	12	2.3	0.3	6	0.4	1.0	82
PLS-1	opt	3.0	2.3	55	1.9	1.7	21	2.1	3.1	24
	neut	3.9	2.3	55	2.9	1.7	21	2.8	3.7	24
	peess	4.9	2.3	55	3.9	1.8	21	3.5	4.5	24
PLS-2	opt	2.4	2.2	39	2.1	1.9	40	1.8	2.7	21
	neut	3.3	2.2	39	3.1	1.9	40	2.6	3.4	21
	peess	4.3	2.2	39	4.1	1.9	40	3.3	4.2	21
PLS-3	opt	2.4	2.2	38	2.2	1.9	40	1.8	2.7	22
	neut	3.3	2.2	38	3.2	1.9	40	2.5	3.4	22
	peess	4.3	2.2	38	4.2	1.9	40	3.3	4.2	22
PLS-4	opt	2.3	2.2	38	2.2	1.9	41	1.8	2.7	21
	neut	3.3	2.2	38	3.2	1.9	41	2.6	3.4	21
	peess	4.3	2.1	38	4.2	1.9	41	3.4	4.2	21
PLS-5	opt	2.3	2.2	39	2.2	1.9	41	1.8	2.7	20
	neut	3.2	2.2	39	3.2	1.9	41	2.6	3.4	20
	peess	4.2	2.1	39	4.2	1.9	41	3.4	4.2	20
PLS-6	opt	2.3	2.2	39	2.2	1.9	41	1.8	2.7	20
	neut	3.2	2.2	39	3.2	1.9	41	2.6	3.4	20
	peess	4.2	2.1	39	4.2	1.9	41	3.4	4.2	20
PLS-7	opt	2.3	2.2	39	2.2	1.9	41	1.8	2.7	20
	neut	3.2	2.2	39	3.2	1.9	41	2.6	3.4	20
	peess	4.2	2.1	39	4.2	1.9	41	3.4	4.2	20

### Delta-Methode beim LB-Portfolio

Allgemein lässt sich festhalten, dass die Delta-Methode gute Resultate für das LB-Portfolios liefert.

Bei der Auswertung der Resultate muss aber dennoch berücksichtigt werden, dass die ausgewählten Bondportfolios nicht exakt linear, sondern leicht konvex auf Zinsänderungen reagieren. Deshalb schneidet die Delta-Gamma-Methode bei der Berechnung des *zweiwöchigen VaR* noch etwas besser ab als die Delta-Methode. Der Fehler, der durch die leichte Konvexität bei den Bondportfolios entsteht, ist aber auch beim *zweiwöchigen VaR* derart minimal, dass die ausgewählten Bondportfolios trotzdem als zulässige Vertreter des linearen Portfoliotyps gelten dürfen.

In 81% der Fälle berechnet die Delta-Methode den *eintägigen VaR(99%)* richtig ( $\%A^0 = 81\%$ ). Wenn der *eintägige VaR(99%)* unterschätzt wird, so beträgt seine prozentuale Abweichung bei neutraler Fehlerbetrachtungsweise im Schnitt  $MW_{neut}^- = 1.3\%$ . Bei einer Überschätzung beträgt seine prozentuale Abweichung  $MW_{neut}^+ = 1.4\%$ . Vergleichbare Resultate erhält man bei der Berechnung des *eintägigen VaR(95%)*.

Obwohl theoretisch der Delta-VaR beim LB-Portfolio den wahren VaR stets überschätzen sollte (aufgrund des konvexen Verhältnisses zwischen Bondpreis und Zinsänderung), werden dennoch VaR-Unterschätzungen verzeichnet.<sup>83</sup> Verantwortlich hierfür ist die MC-Simulation.

Wie erwähnt, sind die Resultate der Full-MC-Methode selbst nur eine Schätzung des wahren VaR. Selbst wenn ein Konfidenzintervall  $[VaR^{Min}, VaR^{Max}]$  zum Konfidenzniveau von 95% definiert wird, liegt der wahre VaR in 5% der Fälle ausserhalb des Intervalls und wird somit falsch eingeschätzt. Zusätzlich sind die nach der Delta-Methode berechneten Resultate auch simulationsbedingten Approximationsfehlern ausgesetzt. Diese beiden Effekte führen dazu, dass obwohl theoretisch unmöglich, vereinzelte VaR-Unterschätzungen festgestellt werden.

Bei der Berechnung des *zweiwöchigen VaR(99%)* liegt der Delta-VaR(99%) zwar in 55% der Fälle deutlich über dem wahren VaR (*zweiwöchiger VaR(95%)*:  $\%A^+ = 52\%$ ), aber die durchschnittliche prozentuale VaR-Überschätzung beträgt selbst bei pessimistischer Sichtweise nur etwa 2.6% (*zweiwöchiger VaR(95%)*:  $MW_{pess}^+ = 2.1\%$ ). Eine Unterschätzung

---

<sup>83</sup> *Eintägiger VaR(95%)*:  $\%A^- = 5\%$ ; *eintägiger VaR(99%)*:  $\%A^- = 3\%$ ; *zweiwöchiger VaR(95%)*:  $\%A^- = 1\%$ ; *zweiwöchiger VaR(99%)*:  $\%A^- = 0\%$

kann beim *zweiwöchigen VaR(99%)* im Gegensatz zum *eintägigen VaR* nicht mehr festgestellt werden.<sup>84</sup>

Der  $MAPE_{neut}$  beim *zweiwöchigen VaR(99%)* beträgt 0.9% (*zweiwöchiger VaR(95%)*:  $MAPE_{neut} = 0.7\%$ ). Selbst unter pessimistischer Sichtweise beträgt der  $MAPE_{pess}$  beim *zweiwöchigen VaR(99%)* lediglich 1.5% (*zweiwöchiger VaR(95%)*:  $MAPE_{pess} = 1.1\%$ ).

### **Delta-Gamma-Methode beim LB-Portfolio**

Die Delta-Gamma-Methode liefert ebenfalls gute Resultate für das LB-Portfolio. In 83% der Fälle berechnet die Methode den *eintägigen VaR(99%)* richtig. Gegenüber der Delta-Methode werden weniger VaR-Überschätzungen ( $\%A^+ = 8\%$ ), dafür mehr VaR-Unterschätzungen ( $\%A^+ = 9\%$ ) festgestellt. Ein ähnliches Bild ergibt sich beim *eintägigen VaR(95%)*. Wie bei der Delta-Methode sind die Abweichungen vom wahren VaR sehr gering. Beim *eintägigen VaR(95%)* beträgt der  $MAPE_{pess}$  lediglich 0.3%, beim *eintägigen VaR(99%)* 0.4%.

Bei der Berechnung des *zweiwöchigen VaR* sind die Resultate der Delta-Gamma-Methode genauer als jene der Delta-Methode. Dieser Verbesserung ist auf die leichte Konvexität der Bondportfolios zurückzuführen.

Die Delta-Gamma-Methode berechnet in 86% der Fälle den *zweiwöchigen VaR(95%)* (Delta-Methode  $\%A^0 = 47\%$ ) und in 82% den *zweiwöchigen VaR(99%)* (Delta-Methode  $\%A^0 = 45\%$ ) richtig. Der  $MAPE_{pess}$  beträgt denn auch beim *zweiwöchigen VaR(95%)* nur 0.3 (Delta-Methode  $MAPE_{pess} = 1.1\%$ ) und beim *zweiwöchigen VaR(99%)* 0.4 (Delta-Methode  $MAPE_{pess} = 1.5\%$ ).

### **PCA-Grid-Methode beim LB-Portfolio**

Auch die PCA-Grid-Methode liefert akzeptable Resultate. Während die PCA-Grid-Methode mit nur einem PCA-Faktor beim *eintägigen VaR(99%)* einen  $MAPE_{neut}$  von 3.7% aufweist, kann dieser Wert bereits durch Berücksichtigung des zweiten Faktors auf 0.6% gesenkt werden. Die Berücksichtigung weiterer PCA-Faktoren verbessert die Resultate nur noch gering. Ein ähnliches Bild erhält man bei der Berechnung der übrigen VaR-Kennzahlen - *eintägiger VaR(95%)*, *zweiwöchiger VaR(95%)* und *zweiwöchiger VaR(99%)*.

<sup>84</sup> Bedingt durch die Konvexitätseigenschaften der Bondpreise

### PLS-Grid-Methode beim LB-Portfolio

Die PLS-Grid-Methode schneidet beim LB-Portfolio gesamthaft am schlechtesten ab. Zwar kann der erste PLS-Faktor leicht mehr Risiko erklären als sein PCA-Pendant, doch jeder weitere PLS-Faktor verbessert die Messgenauigkeit der PLS-Grid-Methode kaum. Es verbleibt eine Restabweichung, die im Folgenden als *PLS-Restabweichung* bezeichnet wird (*MAPE* schwankt zwischen 2% und 4%, je nach Fehlerbetrachtungsweise und Ausgestaltung des VaR).

Weiterführende Analysen haben ergeben, dass die PLS-Restabweichung weder von der Anzahl der Grid-Punkte, noch von der Anzahl der berücksichtigten PLS-Faktoren abhängt. Sie begründet sich darin, dass die PLS-Faktoren nicht direkt von der originären Kovarianzmatrix der Marktfaktoren, sondern aus dem mit Hilfe von MC-Simulationen hergestellten Pre-Calculation-Datenset abgeleitet werden.<sup>85</sup> Schätzt man die Kovarianzmatrix der  $M$  PLS-Faktoren auf der Basis des Pre-Calculation-Datensets.

$$\text{Cov}(\mathbf{S}^{PLS(M)}) = (\mathbf{s}_{\bullet,1}, \dots, \mathbf{s}_{\bullet,N^{PC}}) \cdot (\mathbf{s}_{\bullet,1}, \dots, \mathbf{s}_{\bullet,N^{PC}})^T, \quad (5-1)$$

so weicht diese aufgrund simulationsbedingter Approximationsfehler von der ursprünglichen Kovarianzmatrix der  $M$  Risikokomponenten  $\text{Cov}(\mathbf{S})$  ab. Dies führt dazu, dass die Marktfaktordynamik, die durch die PLS-Faktoren beschrieben wird, ebenfalls leicht von der originären abweicht.<sup>86</sup>

<sup>85</sup> Vgl. 3.5.1 Pre-Calculation-Datenset, S. 77

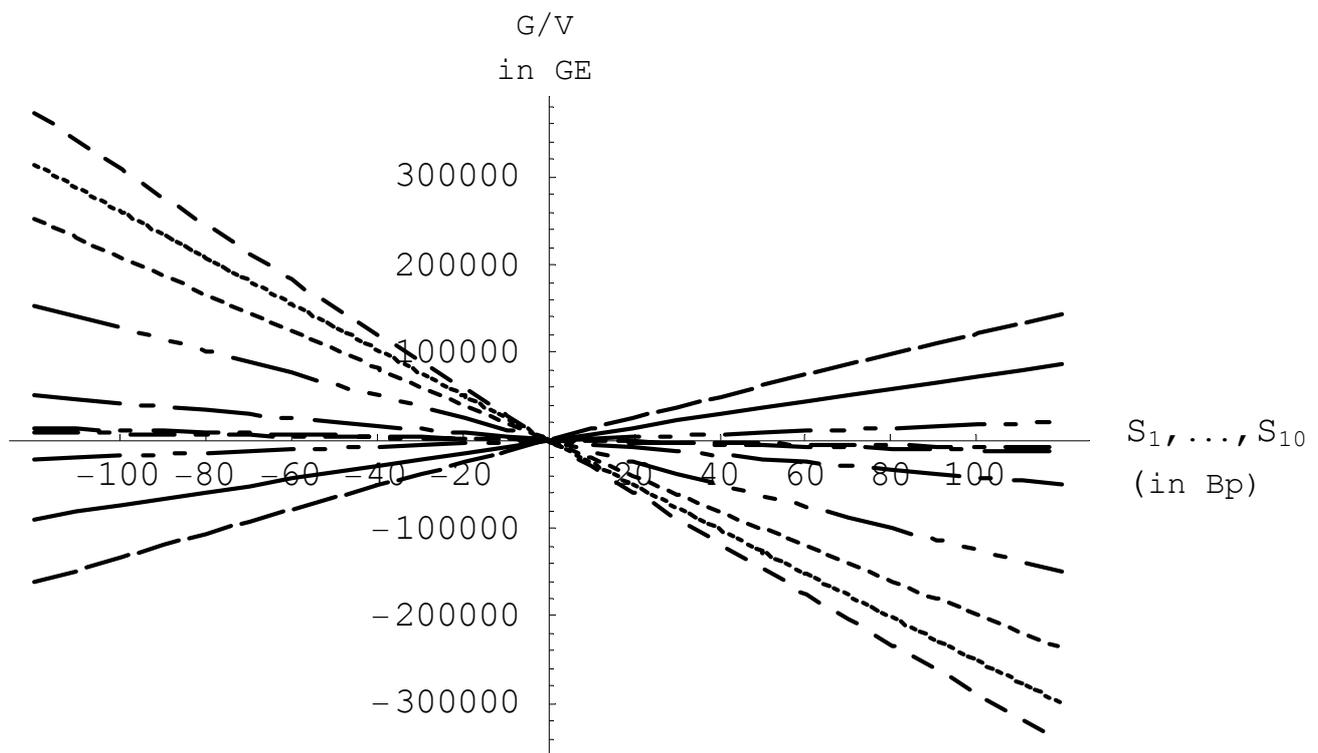
<sup>86</sup> Die PLS-Restabweichung kann verkleinert werden, indem mehr Pre-Calculations durchgeführt werden. Da sich dies aber direkt negativ auf den Rechenaufwand auswirkt, ist auch hier ein geeigneter Trade-off zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand zu finden.

## 5.2 Long/Short-Bond-Portfolio

### 5.2.1 Testanordnung des LSB-Portfolios

Die Zusammensetzung der LSB-Portfolios erfolgt analog zum LB-Portfolio, mit der einzigen Ausnahme, dass die Positionen der Zerobonds mit gleicher Wahrscheinlichkeit entweder Long oder Short sein können.

Abbildung 5-2: G/V-Funktion des LSB-Portfolios<sup>87</sup>



Bei allen VaR-Methoden werden jeweils 100'000 MC-Szenarien durchgeführt. Als Marktdaten dienen die Testzinskurven aus dem Zinskurvenset "Bondportfolio".

### 5.2.2 Testresultate des LSB-Portfolios

Erneut wird in einem ersten Schritt die Genauigkeitsanalyse separat auf Ebene der einzelnen Währungen durchgeführt.

<sup>87</sup> Illustratives Beispiel. Die Linien wiedergeben den Gewinn/Verlust-Verlauf des Portfolios in Abhängigkeit der zehn Marktfaktoren.

Tabelle 5-5: Fehleranalyse\* auf Währungsebene (eintägiger VaR(99%); LSB-Portfolio)

	CHF		DEM		JPY		GBP		USD	
	MAPE in %	RMSPE in %								
Delta	0.3	0.7	0.4	0.7	0.3	0.8	0.4	0.8	0.5	0.9
DG	0.2	0.6	0.3	0.6	0.3	0.7	0.3	0.6	0.3	0.6
PCA-1	28.0	35.7	24.1	34.0	23.3	32.9	28.6	38.9	21.2	31.6
PCA-2	18.4	26.7	17.3	26.2	17.0	27.5	17.0	25.7	14.6	23.1
PCA-3	9.6	15.2	13.4	20.6	15.3	25.4	12.2	19.0	12.9	20.5
PCA-4	7.6	12.5	9.3	16.3	10.2	18.9	7.5	11.6	9.5	16.0
PCA-5	5.4	9.5	7.4	13.9	8.3	15.8	5.3	8.9	7.8	13.9
PCA-6	4.3	7.9	6.5	12.6	7.2	14.3	3.9	7.0	4.7	8.9
PCA-7	3.3	6.3	2.8	5.7	4.9	10.0	2.3	4.4	2.3	5.6
PLS-1	17.7	22.3	16.2	22.7	16.6	23.9	16.6	22.4	15.1	22.2
PLS-2	5.8	7.9	8.1	14.0	6.7	11.5	7.3	10.7	7.0	11.7
PLS-3	3.1	4.2	4.5	7.1	3.6	5.6	3.4	4.9	3.5	5.1
PLS-4	2.6	3.4	3.1	4.1	2.6	3.7	2.4	3.1	2.5	3.3
PLS-5	2.5	3.3	2.8	3.7	2.5	3.2	2.2	2.8	2.4	3.1
PLS-6	2.5	3.3	2.8	3.6	2.4	3.1	2.1	2.8	2.3	3.1
PLS-7	2.5	3.3	2.7	3.5	2.4	3.1	2.1	2.8	2.3	3.1

\*Unter neutraler Fehlereinschätzung:  $MAPE_{neut}$ , bzw.  $RMSPE_{neut}$

Wie die Resultate in Tabelle 5-5 zeigen, ist die Genauigkeit der Methoden auch beim LB-Portfolio nur geringfügig von der währungsspezifischen Zinsdynamik betroffen.

Zur Gesamtanalyse werden wieder die Resultate der 100 Testportfolios der fünf Währungen zusammengefasst. Die weiteren Ausführungen beziehen sich somit auf die aggregierten Resultate der gesamthaft 500 Testportfolios.

In Tabelle 5-6 sind die Testergebnisse für den *eintägigen VaR(99%)* wiedergegeben. Die übrigen Testresultate befinden sich im Anhang.<sup>88</sup>

<sup>88</sup> Tabelle 9-4: Eintägiger VaR(95%) des LSB-Portfolio, S. 198

Tabelle 9-5: Zweiwöchiger VaR(95%) des LSB-Portfolios, S. 199

Tabelle 9-6: Zweiwöchiger VaR(99%) des LSB-Portfolios, S.200

Tabelle 5-6: Eintägiger VaR(99%) des LSB-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE In %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> In %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	Opt	0.5	0.4	16	0.4	0.3	12	0.1	0.3	72
	Neut	1.5	0.4	16	1.4	0.3	12	0.4	0.8	72
	Pess	2.4	0.4	16	2.4	0.3	12	0.7	1.3	72
Delta-Gamma	Opt	0.3	0.3	11	0.3	0.2	8	0.1	0.2	81
	Neut	1.3	0.2	11	1.3	0.2	8	0.3	0.6	81
	Pess	2.3	0.3	11	2.2	0.2	8	0.4	1.0	81
PCA-1	Opt	24.4	24.2	100	0.0	0.0	0	24.4	34.4	0
	Neut	25.2	23.9	100	0.0	0.0	0	25.2	34.7	0
	Pess	25.9	23.7	100	0.0	0.0	0	25.9	35.1	0
PCA-2	Opt	17.5	19.9	92	0.0	0.0	0	16.1	25.4	8
	Neut	18.3	19.7	92	0.0	0.0	0	16.8	25.8	8
	Pess	19.1	19.5	92	0.0	0.0	0	17.6	26.2	8
PCA-3	Opt	13.5	16.3	89	0.0	0.0	0	12.0	20.0	11
	Neut	14.3	16.2	89	0.0	0.0	0	12.7	20.4	11
	Pess	15.2	16.0	89	0.0	0.0	0	13.5	20.8	11
PCA-4	Opt	9.9	13.1	82	0.2	0.0	0	8.1	14.9	18
	Neut	10.7	13.0	82	1.1	0.0	0	8.8	15.3	18
	Pess	11.6	12.9	82	2.2	0.0	0	9.5	15.7	18
PCA-5	Opt	8.1	11.5	76	0.6	0.0	0	6.1	12.2	24
	Neut	9.0	11.4	76	1.5	0.0	0	6.8	12.6	24
	Pess	9.9	11.3	76	2.6	0.0	0	7.5	13.1	24
PCA-6	Opt	6.7	10.0	70	0.3	0.3	0	4.7	10.1	30
	Neut	7.6	9.9	70	1.2	0.2	0	5.3	10.5	30
	Pess	8.6	9.8	70	2.2	0.4	0	6.0	10.9	30
PCA-7	Opt	4.4	7.0	59	0.2	0.2	1	2.6	6.3	40
	Neut	5.3	6.9	59	1.2	0.1	1	3.1	6.7	40
	Pess	6.2	6.8	59	2.2	0.2	1	3.7	7.1	40
PLS-1	Opt	17.2	15.7	91	1.7	0.9	4	15.7	22.2	5
	Neut	18.0	15.5	91	2.8	0.9	4	16.5	22.7	5
	Pess	18.8	15.4	91	3.8	0.9	4	17.3	23.2	5
PLS-2	Opt	8.4	9.7	70	2.1	1.7	15	6.2	10.8	15
	Neut	9.3	9.6	70	3.1	1.7	15	6.9	11.3	15
	Pess	10.2	9.5	70	4.2	1.8	15	7.7	11.8	15
PLS-3	opt	4.2	4.6	56	2.2	1.8	24	2.9	4.9	20
	neut	5.2	4.5	56	3.2	1.8	24	3.7	5.5	20
	pess	6.1	4.5	56	4.3	1.8	24	4.4	6.1	20
PLS-4	opt	2.7	2.3	44	2.2	1.8	31	1.9	2.8	25
	neut	3.7	2.3	44	3.3	1.8	31	2.6	3.5	25
	pess	4.6	2.2	44	4.3	1.8	31	3.4	4.3	25
PLS-5	opt	2.3	1.7	41	2.2	1.8	34	1.7	2.5	25
	neut	3.2	1.7	41	3.3	1.8	34	2.4	3.2	25
	pess	4.2	1.7	41	4.3	1.8	34	3.2	4.0	25
PLS-6	opt	2.2	1.7	41	2.2	1.8	34	1.7	2.4	25
	neut	3.1	1.7	41	3.3	1.8	34	2.4	3.2	25
	pess	4.1	1.7	41	4.3	1.8	34	3.2	3.9	25
PLS-7	opt	2.2	1.7	41	2.2	1.8	35	1.7	2.4	24
	neut	3.1	1.7	41	3.3	1.8	35	2.4	3.2	24
	pess	4.1	1.7	41	4.3	1.8	35	3.2	4.0	24

### Delta-Methode beim LSB-Portfolio

Analog zum LB-Portfolio liefert die Delta-Methode auch beim LSB-Portfolio zuverlässige Resultate.

In 72% der Fälle wird der *eintägige VaR(99%)* richtig berechnet (*eintägiger VaR(95%)*:  $\%A^0 = 77\%$ ). Da die Über- und Unterschätzungen gering sind, ergibt sich für den *eintägigen VaR(99%)* ein  $MAPE_{pess}$  von lediglich 0.7% (*eintägiger VaR(95%)*:  $MAPE_{pess} = 0.4\%$ ).

Auch der *zweiwöchige VaR* lässt sich mit befriedigender Genauigkeit berechnen. Zwar werden beim *zweiwöchigen VaR(99%)* nur noch 32% der Resultate richtig berechnet (*zweiwöchiger VaR(95%)*:  $\%A^0 = 34\%$ ),<sup>89</sup> da aber auch hier die Abweichungen so gering sind, beträgt der  $MAPE_{neut}$  nur 1.3% (*zweiwöchiger VaR(95%)*:  $MAPE_{neut} = 1.0\%$ ). Selbst unter pessimistischer Sichtweise steigt der  $MAPE_{pess}$  nicht über 2.0% (*zweiwöchiger VaR(95%)*:  $MAPE_{pess} = 1.5\%$ ).

### Delta-Gamma-Methode beim LSB-Portfolio

Wiederum sind die Resultate der Delta-Gamma-Methode bei der Berechnung des *eintägigen VaR* vergleichbar mit denjenigen der Delta-Methode. So beträgt beim *eintägigen VaR(95%)* der  $MAPE_{neut} = 0.2\%$  und beim *eintägigen VaR(99%)* 0.3% (Delta-Methode:  $MAPE_{neut} = 0.3\%$ , bzw.  $MAPE_{neut} = 0.4\%$ ).

Beim *zweiwöchigen VaR* steigt die Genauigkeit aber im Vergleich zur Delta-Methode, was wiederum auf die leichte Konvexität des Bondportfolios zurückzuführen ist. In 84% der Fälle wird der *zweiwöchige VaR(99%)* richtig berechnet (Delta-Methode:  $\%A^0 = 32\%$ ). Selbst unter pessimistischer Sichtweise beträgt der  $MAPE_{pess}$  bloss 0.4% (Delta-Methode:  $MAPE_{pess} = 2.0\%$ ). Ähnliche Resultate ergeben sich bei der Ermittlung des *zweiwöchigen VaR(95%)*.

### PCA-Methode beim LSB-Portfolio

Da das LSB-Portfolio aufgrund seiner Konstruktion nicht hauptsächlich von der Bewegung des ersten PCA-Faktors (Shift-Factor) abhängig ist, hat die PCA-Methode Mühe das Risiko richtig einzuschätzen.

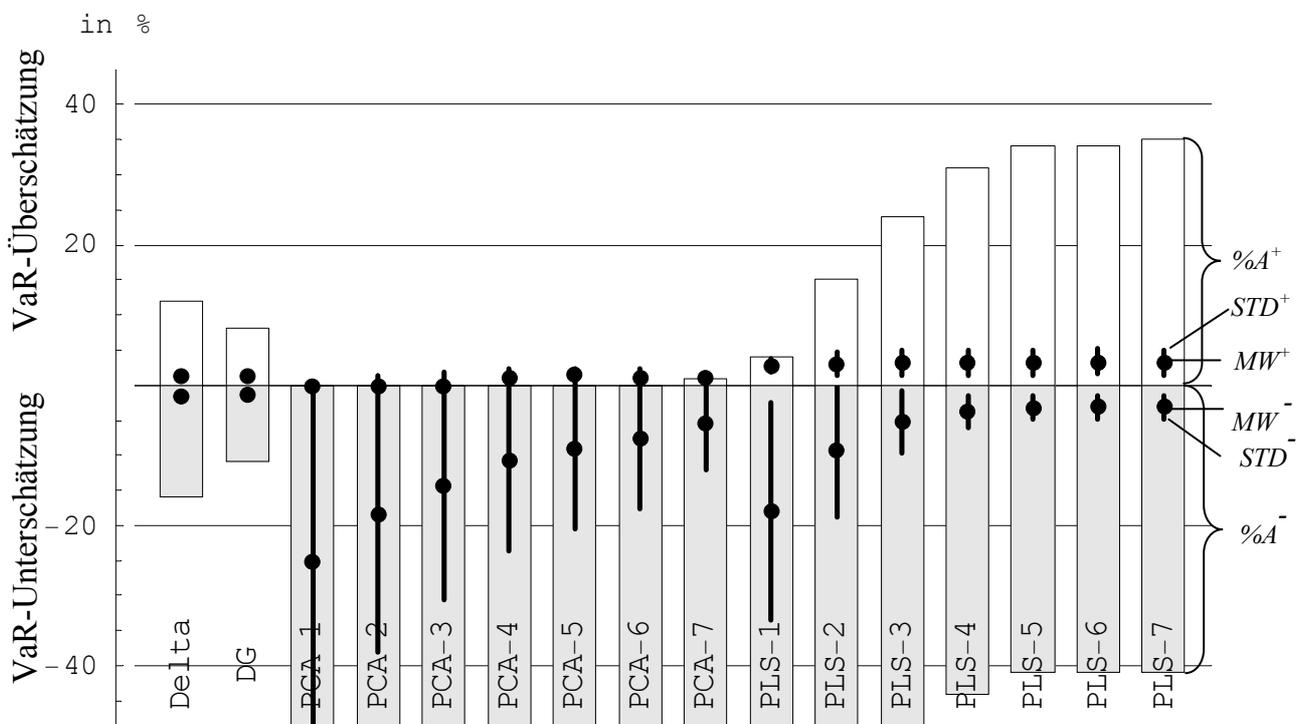
Falls nur der erste PCA-Faktor berücksichtigt wird (PCA-1), beträgt der  $MAPE_{neut}$  beim *eintägigen VaR(99%)* 25.2% (*eintägiger VaR(95%)*:  $MAPE_{neut} = 25.1\%$ ). Es werden mindestens 4 PCA-Faktoren benötigt, um den  $MAPE$  unter 10% zu bringen. Beim *zweiwöchigen VaR* sind sogar 5 PCA-Faktoren nötig.

<sup>89</sup> Ist auf die leicht konvexe G/V-Funktion des LB-Portfolios zurückzuführen.

Erschwerend kommt hinzu, dass die Abweichungen zur Hauptsache Unterschätzungen sind. Das effektive Risiko wird durch die PCA-Methode mit wenigen Faktoren also stets unterschätzt, egal ob Long- oder Short-Bond-Positionen gehalten werden. So unterschätzt z.B. die PCA-2-Methode den *eintägigen VaR(99%)* in 92% der Fälle im Schnitt um  $MW_{neut}^- = 18.3\%$  (PCA-3:  $\%A^- = 89\%$ ,  $MW_{neut}^- = 14.3\%$ ; PCA-4:  $\%A^- = 82\%$ ,  $MW_{neut}^- = 10.7\%$ ).

Das Problem wird in Abbildung 5-3 verdeutlicht. Man sieht, dass die PCA-Methode den *eintägigen VaR(99%)* mit nur wenigen Faktoren stets unterschätzt und dass sich die Resultate durch zusätzlichen Einbezug weiterer Faktoren nur langsam verbessern.

Abbildung 5-3: Neutrale Fehleranalyse (eintägiger VaR(99%); LSB-Portfolio)



Dasselbe Bild erhält man bei den übrigen VaR-Kennzahlen, wobei sich die Resultate mit Zunahme der Haltedauer verschlechtern.

### PLS-Grid-Methode beim LSB-Portfolio

Die PLS-Grid-Methode ist zwar besser in der Lage, das Risiko einzufangen als die PCA-Grid-Methode. Im Vergleich zur Delta- oder zur Delta-Gamma-Methode schneidet die Genauigkeit ihrer Resultate jedoch eher bescheiden ab.

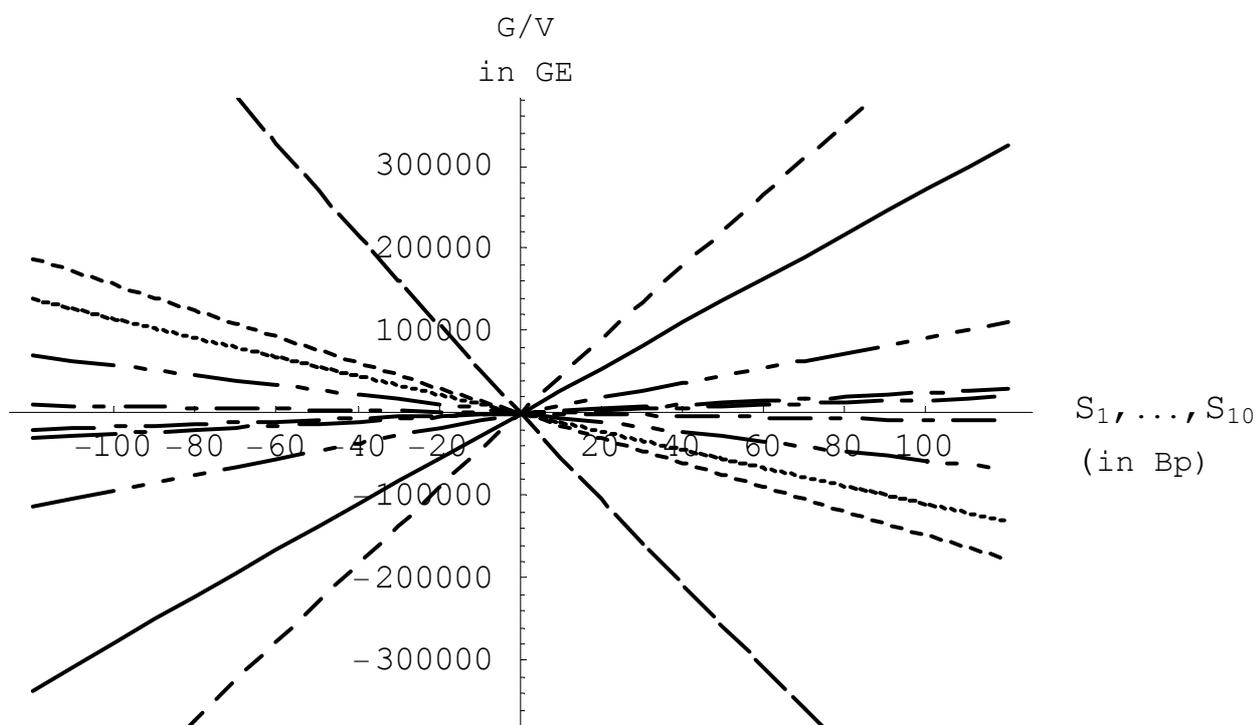
Mit nur einem PLS-Faktor (PLS-1) beträgt der  $MAPE_{neut}$  beim *eintägigen VaR(99%)* 16.5%. Unter PLS-2 verbessert sich  $MAPE_{neut}$  auf 6.9% und unter PLS-3 sogar auf 3.7%. Im Vergleich zur PLS-Grid-Methode braucht die PCA-Grid-Methode etwa sieben Faktoren, um dieselbe Genauigkeit zu erreichen. Die Berücksichtigung von vier und mehr PLS-Faktoren verbessert die Genauigkeit kaum mehr. Es verbleibt die PLS-Restabweichung, die je nach Haltedauer und Konfidenzniveau des VaR zu einem  $MAPE$  von 2% bis 4% führt.

### 5.3 Hedged-Long/Short-Bond-Portfolio

#### 5.3.1 Testanordnung des HLSB-Portfolios

Das HLSB-Portfolio wird zunächst gleich zusammengestellt wie das LSB-Portfolio. Im Gegensatz dazu wird jedoch das HLSB-Portfolio zusätzlich gegenüber (kleinen) parallelen Zinsänderungen abgesichert, indem die fünfjährige Zerobondposition so gewählt wird, dass eine Portfolioduration von Null resultiert.

Abbildung 5-4: G/V-Funktion des HLSB-Portfolios<sup>90</sup>



Bei allen VaR-Methoden werden jeweils 100'000 MC-Szenarien durchgeführt. Als Marktdaten dienen die Testzinskurven des Zinskurvensets "Bondportfolio".

<sup>90</sup> Illustratives Beispiel. Die Linien wiedergeben den Gewinn/Verlust-Verlauf des Portfolios in Abhängigkeit der zehn Marktfaktoren.

### 5.3.2 Testresultate des HLSB-Portfolios

Tabelle 5-7: Fehleranalyse\* auf Währungsebene (eintägiger VaR(99%); HLSB-Portfolio)

	CHF		DEM		JPY		GBP		USD	
	MAPE in %	RMSPE in %								
Delta	0.2	0.3	0.3	0.5	0.2	0.6	0.2	0.5	0.1	0.4
DG	0.2	0.4	0.3	0.6	0.2	0.7	0.2	0.6	0.2	0.5
PCA-1	81.3	82.2	75.5	78.5	77.7	79.4	76.1	77.7	80.9	82.3
PCA-2	68.3	69.9	58.1	61.8	61.5	64.4	57.5	60.1	63.8	67.0
PCA-3	44.9	51.5	47.8	52.8	56.0	59.3	45.1	49.0	57.9	61.3
PCA-4	40.4	47.6	35.6	41.4	39.4	44.4	32.4	38.6	45.1	50.8
PCA-5	24.3	30.2	26.7	34.2	33.5	39.4	24.4	30.2	39.4	45.5
PCA-6	20.3	26.3	20.5	26.7	28.8	34.8	20.7	26.7	28.7	34.0
PCA-7	13.1	16.9	10.5	15.7	16.0	21.5	10.2	14.7	14.1	17.9
PLS-1	50.4	51.8	44.6	47.1	49.1	51.1	47.8	49.6	51.4	53.4
PLS-2	18.7	22.1	21.1	24.8	21.4	25.2	25.5	28.2	27.7	31.2
PLS-3	7.1	8.5	7.9	10.1	7.3	9.2	10.6	12.8	8.6	11.5
PLS-4	3.1	4.0	3.6	5.0	3.0	3.7	3.8	4.8	3.4	4.7
PLS-5	2.8	3.7	2.5	3.5	2.4	3.0	2.8	3.6	2.7	3.5
PLS-6	2.7	3.7	2.4	3.4	2.3	2.9	2.6	3.4	2.6	3.3
PLS-7	2.7	3.6	2.4	3.4	2.3	2.9	2.6	3.4	2.5	3.3

\*Unter neutraler Fehlereinschätzung:  $MAPE_{neut}$ , bzw.  $RMSPE_{neut}$

Analysiert man die Genauigkeit wiederum in einem ersten Schritt auf Währungsebene, so deuten die Resultate erneut darauf hin, dass die Genauigkeiten der Methoden nur geringfügig von den währungsspezifischen Zinskurvenbewegungen abhängen.

Für die weiteren Analysen werden erneut die Resultate der 500 Testportfolios zusammengefasst. In der Tabelle 5-8 sind die Testresultate für den *eintägigen VaR(99%)* wiedergegeben. Die übrigen Testresultate finden sich im Anhang.<sup>91</sup>

<sup>91</sup> Tabelle 9-7: Eintägiger VaR(95%) des HLSB-Portfolios, S. 201

Tabelle 9-8: Zweiwöchiger VaR(95%) des HLSB-Portfolios, S. 202

Tabelle 9-9: Zweiwöchiger VaR(99%) des HLSB-Portfolios, S. 203

Tabelle 5-8: Eintägiger VaR(99%) des HLSB-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	Opt	0.2	0.1	4	0.5	0.3	8	0.1	0.2	88
	Neut	1.2	0.1	4	1.5	0.3	8	0.2	0.5	88
	Pess	2.2	0.2	4	2.6	0.3	8	0.3	0.9	88
Delta-Gamma	Opt	0.3	0.2	8	0.3	0.2	11	0.1	0.2	81
	Neut	1.3	0.3	8	1.2	0.3	11	0.2	0.6	81
	Pess	2.3	0.2	8	2.2	0.3	11	0.4	1.0	81
PCA-1	Opt	78.1	16.6	100	0.0	0.0	0	78.1	79.8	0
	Neut	78.3	16.4	100	0.0	0.0	0	78.3	80.0	0
	Pess	78.5	16.3	100	0.0	0.0	0	78.5	80.2	0
PCA-2	opt	61.5	19.3	100	0.0	0.0	0	61.5	64.4	0
	neut	61.8	19.1	100	0.0	0.0	0	61.8	64.7	0
	pess	62.2	18.9	100	0.0	0.0	0	62.2	65.0	0
PCA-3	opt	49.9	22.2	100	0.0	0.0	0	49.9	54.6	0
	neut	50.4	22.0	100	0.0	0.0	0	50.4	54.9	0
	pess	50.9	21.8	100	0.0	0.0	0	50.9	55.3	0
PCA-4	opt	38.1	22.8	100	0.0	0.0	0	38.1	44.4	0
	neut	38.7	22.6	100	0.0	0.0	0	38.7	44.8	0
	pess	39.3	22.3	100	0.0	0.0	0	39.3	45.2	0
PCA-5	opt	29.1	21.1	100	0.0	0.0	0	29.1	36.0	0
	neut	29.8	20.9	100	0.0	0.0	0	29.8	36.4	0
	pess	30.5	20.7	100	0.0	0.0	0	30.5	36.9	0
PCA-6	opt	23.4	18.2	99	0.0	0.0	0	23.1	29.5	1
	neut	24.1	18.0	99	0.0	0.0	0	23.9	30.0	1
	pess	24.9	17.9	99	0.0	0.0	0	24.6	30.5	1
PCA-7	opt	12.7	12.0	94	0.0	0.0	0	11.9	16.9	6
	neut	13.5	11.8	94	0.0	0.0	0	12.7	17.4	6
	pess	14.4	11.7	94	0.0	0.0	0	13.6	18.0	6
PLS-1	opt	48.2	14.1	100	0.0	0.0	0	48.2	50.2	0
	neut	48.7	13.9	100	0.0	0.0	0	48.7	50.6	0
	pess	49.2	13.8	100	0.0	0.0	0	49.2	51.1	0
PLS-2	opt	22.7	13.0	98	0.0	0.0	0	22.2	25.9	2
	neut	23.4	12.9	98	0.0	0.0	0	23.0	26.5	2
	pess	24.2	12.8	98	0.0	0.0	0	23.7	27.1	2
PLS-3	opt	8.4	6.3	88	1.4	1.0	7	7.5	9.8	5
	neut	9.3	6.3	88	2.5	1.1	7	8.3	10.5	5
	pess	10.2	6.2	88	3.5	1.1	7	9.2	11.2	5
PLS-4	opt	3.4	3.0	63	2.1	1.9	21	2.6	3.8	16
	neut	4.3	2.9	63	3.1	1.9	21	3.4	4.5	16
	pess	5.3	2.9	63	4.1	1.9	21	4.2	5.2	16
PLS-5	opt	2.5	2.0	48	2.3	2.0	29	1.9	2.8	23
	neut	3.5	2.0	48	3.3	2.0	29	2.6	3.5	23
	pess	4.5	2.0	48	4.3	2.0	29	3.4	4.2	23
PLS-6	opt	2.4	1.9	44	2.3	1.9	31	1.8	2.6	25
	neut	3.4	1.9	44	3.3	1.9	31	2.5	3.3	25
	pess	4.3	1.8	44	4.3	2.0	31	3.3	4.1	25
PLS-7	opt	2.4	1.8	44	2.3	1.9	31	1.8	2.6	25
	neut	3.4	1.8	44	3.3	1.9	31	2.5	3.3	25
	pess	4.3	1.8	44	4.3	2.0	31	3.3	4.1	25

### Delta-Methode beim HLSB-Portfolio

Die Genauigkeit der Delta-Methode ist durch den Duration-Hedge nicht betroffen und bleibt auf hohem Niveau.

In 88% der Fälle wird der *eintägige VaR(99%)* richtig berechnet (*eintägiger VaR(95%)*:  $\%A^0 = 76\%$ ). Wiederum fallen die Über- und Unterschätzungen gering aus. Der  $MAPE_{pess}$  liegt bei 0.3% (*eintägiger VaR(95%)*:  $MAPE_{pess} = 0.5\%$ ).

Der *zweiwöchige VaR(99%)* wird in 62% aller Fälle richtig berechnet (*zweiwöchiger VaR(95%)*:  $\%A^0 = 62\%$ ). Da die allfälligen Abweichungen gering sind, ergibt sich daraus ein  $MAPE_{pess}$  von lediglich 1.0% (*zweiwöchiger VaR(95%)*:  $MAPE_{pess} = 0.8\%$ ).

### **Delta-Gamma-Methode beim HLSB-Portfolio**

Die Delta-Gamma-Methode liefert auch für das HLSB-Portfolio genaue Resultate.

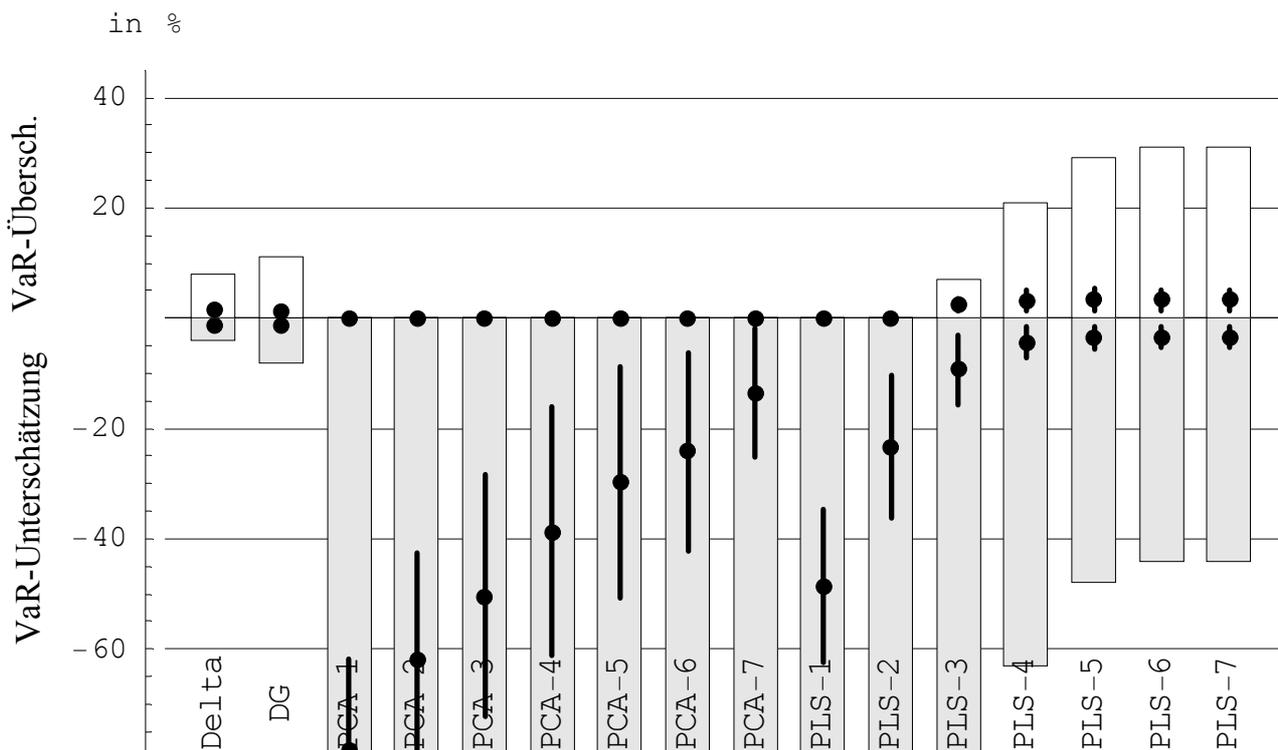
Der *eintägige VaR(99%)* wird in 81% der Fälle richtig eingeschätzt. Da die Über- und Unterschätzungen jeweils gering sind, ergibt sich selbst bei pessimistischer Fehlereinschätzung ein  $MAPE_{pess}$  von 0.4% (*eintägiger VaR(95%)*:  $MAPE_{pess} = 0.4\%$ ).

Beim *zweiwöchigen VaR(99%)* wird in 85% der Fälle das Risiko richtig berechnet (*zweiwöchiger VaR(95%)*:  $\%A^0 = 85\%$ ). Der  $MAPE_{pess}$  beträgt deshalb nur 0.3% (*zweiwöchiger VaR(95%)*:  $MAPE_{pess} = 0.3\%$ ). Auch hier schneidet die Delta-Gamma-Methode aufgrund des leicht konvexen Portfolios besser ab als die Delta-Methode.

### **PCA-Grid-Methode beim HLSB-Portfolio**

Die Genauigkeit der PCA-Grid-Methode ist durch den Duration-Hedge am meisten beeinträchtigt, denn gerade gegenüber einer Parallelbewegung der Zinskurve, die in der Regel durch den ersten PCA-Faktor (Level-Faktor) beschrieben wird, ist das Portfolio durch die Absicherung mehr oder weniger immunisiert. Der erste PCA-Faktor besitzt somit kaum noch Aussagekraft hinsichtlich des Portfoliorisikos.

Abbildung 5-5: Neutrale Fehleranalyse (eintägiger VaR(99%); Hedged-L/S-Bond-Portfolio)



Mit einem PCA-Faktor (PCA-1) wird der *eintägige VaR* in 100% der Fälle unterschätzt, wobei die durchschnittliche Unterschätzung rund 78% beträgt. Berücksichtigt man zusätzlich den zweiten PCA-Faktor (PCA-2), so verbessern sich die Resultate nur geringfügig (*eintägiger VaR(99%)*:  $MAPE_{neut} = 61.8\%$ ). Selbst mit drei PCA-Faktoren (PCA-3) und unter optimistischer Sichtweise liegt der  $MAPE_{opt}$  bei etwa 50%. Nicht einmal mit sieben PCA-Faktoren kann der  $MAPE_{opt}$  unter 10% gesenkt werden, wie Abbildung 5-5 zeigt.

Beim *zweiwöchigen VaR* akzentuieren sich die Fehler zusätzlich. Bei drei PCA-Faktoren (PCA-3) liegt der  $MAPE$  bei rund 50% und selbst bei sieben PCA-Faktoren (PCA-7) noch bei rund 13%.

### PLS-Grid-Methode beim HLSB-Portfolio

Auch die Genauigkeit der PLS-Grid-Methode ist vom Duration-Hedge in negativer Weise betroffen, allerdings nicht im gleichen Ausmass wie die PCA-Grid-Methode. Dabei nimmt die PLS-Restabweichung im Vergleich zu den vorherigen Bond-Portfolios zu. Der Grund ist, dass durch den Hedge des Portfolios das Niveau des Marktrisikos stark vermindert

wird, so dass die PLS-Restabweichung, die auf der nicht exakten Wiedergabe der originären Kovarianzmatrix beruht, stärker ins Gewicht fällt.<sup>92</sup>

Berücksichtigt man lediglich den ersten PLS-Faktor (PLS-1), so unterschätzt die Methode in 100% der Fälle den *eintägigen VaR* um durchschnittlich rund 48%. Aber schon bei Einbezug der ersten drei PLS-Faktoren (PLS-3) kann der *MAPE* für den *eintägigen VaR* auf unter 10% gesenkt werden. Bei vier PLS-Faktoren liegt der  $MAPE_{pess}$  unter 5% und bei fünf PLS-Faktoren unter 3.5%. Jeder weitere PLS-Faktor kann die Genauigkeit nicht weiter verbessern – es verbleibt die PLS-Restabweichung. Ein ähnliches Resultat erhält man bei der Berechnung des *zweiwöchigen VaR*.

---

<sup>92</sup> Vgl. die Ausführungen zur PLS-Restabweichung auf S. 127

## 5.4 Short-Caplet/Floorlet-Portfolio

### 5.4.1 Testanordnung des SCF-Portfolios

Das SCF-Portfolio, das aus zufällig ausgewählten Short-Positionen in kurzfristigen Caplets und Floorlets besteht, repräsentiert die Kategorie "konvexes Portfolio". Die Testportfolios setzen sich aus 250 Caplets und 250 Floorlets zusammen, deren Eigenschaften gemäss Tabelle 5-9 zufällig bestimmt werden.

Tabelle 5-9: Zusammensetzung des SCF-Portfolios

Art und Anzahl Instrumente	250 Caplets und 250 Floorlets
Position	Short
Nominalbetrag	Gleichverteilt zwischen 1 Mio. und 10 Mio. GE
Optionslaufzeit	Zufällig 1,2,...,7 Tage (gleichverteilt) + VaR-Haltedauer <sup>93</sup>
Underlying	Der zu Grunde liegende Referenzzinssatz (Forwardsatz) der Option wird zufällig bestimmt. Zur Verfügung stehen (gleichverteilt): 1- und 2-wöchiger-LIBOR-Satz, sowie 1-, 2-, 3-, 4- und 5-Monats-LIBOR-Satz
Volatilität	Die Volatilität des Underlyings beträgt 40% p.a. <sup>94</sup>
Strike-Rate	Gleichverteilt im Bereich: Wert des aktuellen Forwardsatzes plus/minus das Dreifache seiner täglichen Volatilität. <sup>95</sup>

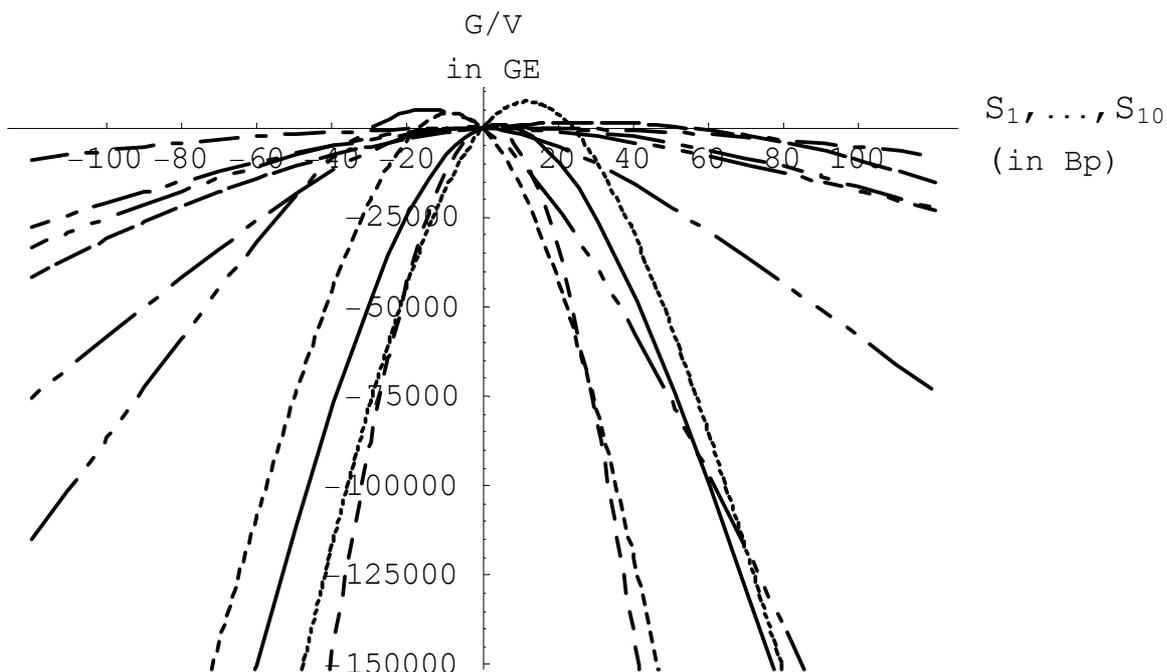
Wie bereits erwähnt, sind die Instrumente Caplet und Floorlet lediglich Mittel zum Zweck, um ein Portfolio mit ausgeprägter Konvexität zu erhalten. Die Optionen im Portfolio weisen eine speziell kurze Laufzeit aus, damit die Konvexität auch deutlich zum Ausdruck kommt. In Abbildung 5-6 wird die G/V-Funktion eines zufällig ausgewählten Testportfolios dargestellt.<sup>96</sup>

<sup>93</sup> Wird z.B. aus der Menge der möglichen Laufzeiten: {1,2,...,7} zufällig die Zahl 3 ausgewählt, so beträgt die Optionslaufzeit für die Berechnung des *zweiwöchigen VaR* (Haltedauer = 10 Tage)  $t_{\text{Opt}} = 10 + 3$  Tage. Für die Berechnung des *eintägigen VaR* (Haltedauer = 1 Tag), wäre die entsprechende Optionslaufzeit  $t_{\text{Opt}} = 1 + 3$  Tage.

<sup>94</sup> Vereinfachende Modellannahme. In der Praxis sind die Volatilitäten der entsprechenden Forwardrates zu berücksichtigen und gegebenenfalls stochastisch zu modellieren.

<sup>95</sup> Man erhält somit "out-", "at-" sowie "in-the-money"-Optionen, so dass Optionen mit unterschiedlicher "Money-ness" im Portfolio enthalten sind.

<sup>96</sup> Die konvexe GV-Funktion ähnelt von der Form her der G/V-Funktion, die Kambhu (1998), S. 38, in seiner Untersuchung als „Estimated Price Risk in the Global Dealer Portfolio“ identifiziert hat.

Abbildung 5-6: G/V-Funktion des SCF-Portfolios<sup>97</sup>

Für das SCF-Portfolio werden aus dem Zinskurvenset "Optionsportfolio" zufällig 100 Zinskurven ausgewählt und ebenfalls zufällig 100 Testportfolios mit jeweils 500 Optionen (250 Caplets und 250 Floorlets) zusammengestellt. Die VaR-Methoden setzen bei der Berechnung jeweils 10'000 MC-Simulationen ein, und für die Optionsbewertungen wird das Black-76-Modell verwendet.<sup>98</sup> Die Volatilitäten der Underlyings werden als konstant angenommen.

#### 5.4.2 Testresultate des SCF-Portfolios

In Tabelle 5-10 sind die Resultate für die Berechnung des *eintägigen*  $VaR(99\%)$  aufgeführt, während die übrigen Resultate wiederum im Anhang zu finden sind.<sup>99</sup>

<sup>97</sup> Illustratives Beispiel. Die Linien wiedergeben den Gewinn/Verlust-Verlauf des Portfolios in Abhängigkeit der zehn Marktfaktoren.

<sup>98</sup> Das Bewertungsmodell wird beschrieben unter 8.1 Caplets und Floorlets, S. 181

<sup>99</sup> Tabelle 9-10: Eintägiger  $VaR(95\%)$  des SCF-Portfolios, S. 204

Tabelle 9-11: Zweiwöchiger  $VaR(95\%)$  des SCF-Portfolios, S. 205

Tabelle 9-12: Zweiwöchiger  $VaR(99\%)$  des SCF-Portfolios, S. 206

Tabelle 5-10: Eintägiger VaR(99%) des SCF-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	59.4	13.9	100	0.0	0.0	0	59.4	61.0	0
	neut	61.0	13.3	100	0.0	0.0	0	61.0	62.5	0
	pess	62.8	12.8	100	0.0	0.0	0	62.8	64.1	0
Delta-Gamma	opt	0.0	0.0	0	2.1	1.2	17	0.4	1.0	83
	neut	0.0	0.0	0	5.9	1.7	17	1.0	2.5	83
	pess	0.0	0.0	0	9.6	1.8	17	1.6	4.0	83
PCA-1	opt	15.1	16.1	85	0.0	0.0	0	12.9	20.4	15
	neut	18.6	15.3	85	0.0	0.0	0	15.8	22.2	15
	pess	22.5	14.3	85	0.0	0.0	0	19.1	24.5	15
PCA-2	opt	17.9	13.8	38	2.0	1.4	6	6.9	14.0	56
	neut	20.9	13.1	38	6.3	1.7	6	8.3	15.3	56
	pess	24.4	12.0	38	10.8	1.7	6	10.0	17.0	56
PCA-3	opt	8.9	5.9	30	2.1	1.8	12	2.9	5.9	58
	neut	12.1	5.6	30	6.7	2.2	12	4.5	7.7	58
	pess	15.7	4.9	30	11.4	2.0	12	6.1	9.9	58
PCA-4	opt	4.5	3.9	22	2.6	2.0	21	1.5	3.2	57
	neut	7.9	3.6	22	7.5	2.3	21	3.3	5.5	57
	pess	11.4	3.2	22	12.2	2.5	21	5.1	8.0	57
PCA-5	opt	0.8	0.2	3	3.0	2.3	50	1.5	2.7	47
	neut	4.4	1.6	3	7.8	2.8	50	4.1	5.9	47
	pess	8.9	2.5	3	12.2	3.1	50	6.4	9.0	47
PLS-1	opt	18.4	17.4	66	3.1	3.7	5	12.4	20.6	29
	neut	21.6	16.6	66	7.7	3.8	5	14.8	22.3	29
	pess	25.3	15.6	66	12.4	4.4	5	17.4	24.4	29
PLS-2	opt	12.9	8.8	42	3.1	2.9	14	5.8	10.2	44
	neut	16.3	8.1	42	8.0	3.2	14	7.9	12.2	44
	pess	20.1	7.3	42	13.0	3.5	14	10.2	14.7	44
PLS-3	opt	8.7	7.1	29	4.9	3.9	25	3.8	6.8	46
	neut	12.1	6.5	29	10.2	4.2	25	6.1	9.3	46
	pess	16.0	5.8	29	15.0	4.9	25	8.4	12.1	46
PLS-4	opt	6.8	5.7	19	5.1	4.3	39	3.3	5.7	42
	neut	10.2	5.3	19	10.3	4.9	39	5.9	8.7	42
	pess	13.9	4.8	19	15.1	5.5	39	8.5	11.9	42
PLS-5	opt	7.0	5.5	9	5.8	4.7	53	3.7	6.0	38
	neut	10.4	4.9	9	10.9	5.4	53	6.7	9.5	38
	pess	14.2	4.4	9	15.6	5.9	53	9.5	12.9	38

### Delta-Methode beim SCF-Portfolio

Während die Delta-Methode bei den linearen Portfolios zufrieden stellende Resultate liefert, trifft dies für das vorliegende konvexe Portfolio nicht mehr zu. Aufgrund der Short-Options-Positionen unterschätzt die Methode in 100% der Fälle den wahren VaR. Die durchschnittliche Unterschätzung des *eintägigen VaR(99%)* beträgt selbst unter optimistischer Einschätzung  $MW_{opt}^- = 59.4\%$ . (*eintägiger VaR(95%)*):  $MW_{opt}^- = 55.3\%$ ).

Beim *zweiwöchigen VaR(99%)* verschlechtern sich die Resultate weiter. Wiederum wird der VaR in allen Fällen unterschätzt. Die durchschnittliche Unterschätzung steigt selbst

unter optimistischer Sichtweise auf  $MW_{opt}^- = 85.2\%$  (zweiwöchiger  $VaR(95\%)$ ):  $MW_{opt}^- = 83.5\%$ ).

### Delta-Gamma-Methode beim SCF-Portfolio

Die Delta-Gamma-Methode liefert für den *eintägigen*  $VaR$  sehr genaue Resultate, jedoch nicht mehr für den *zweiwöchigen*  $VaR$ . Der Fehler ist auf den konstanten Gamma-Term zurückzuführen, der die Konvexitätseigenschaften der Portfolios überschätzt.<sup>100</sup>

In 83% der Fälle berechnet die Delta-Gamma-Methode den *eintägigen*  $VaR(99\%)$  richtig, und in 17% der Fälle überschätzt sie ihn (*eintägiger*  $VaR(95\%)$ ):  $\%A^0 = 84\%$  und  $\%A^+ = 16\%$ ). Eine  $VaR$ -Unterschätzung wird nicht festgestellt. Die durchschnittliche Überschätzung liegt je nach Betrachtungsweise zwischen  $MW_{opt}^+ = 2.1\%$  und  $MW_{pess}^+ = 9.6\%$  (*eintägiger*  $VaR(95\%)$ ):  $MW_{opt}^+ = 1.2\%$  und  $MW_{pess}^+ = 5.9\%$ ). Da der Grossteil der Fälle richtig berechnet werden, ergibt sich selbst bei pessimistischer Sichtweise nur ein  $MAPE_{pess}$  von 1.6 (*eintägiger*  $VaR(95\%)$ ):  $MAPE_{pess} = 0.9$ ).

Beim *zweiwöchigen*  $VaR(99\%)$  hingegen sind es nur noch 27% der Fälle, die als richtig berechnet gelten (*zweiwöchiger*  $VaR(95\%)$ ):  $\%A^0 = 30\%$ ). Bei den restlichen 73% der Fälle wird der  $VaR$  aufgrund des konstanten Gamma-Terms überschätzt (*zweiwöchiger*  $VaR(95\%)$ ):  $\%A^+ = 70\%$ ). Die durchschnittliche Überschätzung liegt unter pessimistischer Sichtweise bei  $MW_{pess}^+ = 23.1\%$ , und führt zu einem  $MAPE_{pess}$  von 17.0% (*zweiwöchiger*  $VaR(95\%)$ ):  $MW_{pess}^+ = 16.7\%$ ,  $MAPE_{pess} = 11.7\%$ ).

### PCA-Grid-Methode beim SCF-Portfolio

Die PCA-Grid-Methode liefert für das SCF-Portfolio gute Resultate. Zwar ist die Delta-Gamma-Methode bei der Berechnung des *eintägigen*  $VaR$  noch etwas exakter, aber beim *zweiwöchigen*  $VaR$  sind die Resultate der PCA-Grid-Methode klar den übrigen Methoden vorzuziehen.

Die PCA-Grid-Methode mit nur einem PCA-Faktor (PCA-1) unterschätzt den *eintägigen*  $VaR(99\%)$  in 85% der Fälle um durchschnittlich  $MW_{neut}^- = 18.6\%$ . Überschätzungen konn-

<sup>100</sup> Bei at-the-money-Optionen ist die Krümmung am ausgeprägtesten. Die Krümmung nimmt aber nach beiden Seiten wieder ab. Diese Krümmungsveränderungen können jedoch mit der Delta-Gamma-Approximation nicht abgebildet werden..

ten keine festgestellt werden. Der  $MAPE_{neut}$  beträgt 15.8%. Bei Berücksichtigung von drei PCA-Faktoren (PCA-3) liegt der  $MAPE_{neut}$  aber bereits unter 5%.

Beim *zweiwöchigen*  $VaR(99\%)$  hingegen genügen drei PCA-Faktoren (PCA-3), um den  $MAPE_{neut}$  auf 2.2% zu reduzieren (*zweiwöchiger*  $VaR(95\%)$ :  $MAPE_{neut} = 3.9\%$ ). Dieser liegt deutlich unter dem entsprechenden  $MAPE_{neut}$  von 13.4% der Delta-Gamma-Methode. Jeder weitere PCA-Faktor verbessert die Resultate kaum noch, im Gegenteil: Je mehr PCA-Faktoren berücksichtigt werden, desto mehr Resultate überschätzen den wahren VaR. Zusätzliche Untersuchungen haben ergeben, dass diese Überschätzung auf den Grid-Approximationsfehler zurückzuführen ist.<sup>101</sup>

### PLS-Grid-Methode beim SCF-Portfolio

Die Genauigkeit der PLS-Grid-Methode ist am ehesten vergleichbar mit jener der PCA-Grid-Methode.

Beim *eintägigen*  $VaR(99\%)$  benötigt die PLS-Grid-Methode drei Faktoren (PLS-3), um den  $MAPE_{pess}$  auf 8.4% zu reduzieren (*eintägigen*  $VaR(95\%)$ :  $MAPE_{pess} = 9.7\%$ ). Damit schneidet sie leicht schlechter ab als die PCA-Grid-Methode und deutlich schlechter als die Delta-Gamma-Methode.

Beim *zweiwöchigen*  $VaR(99\%)$  sind die Resultate etwas ungenauer, als jene der PCA-Grid-Methode. Mit drei PLS-Faktoren (PLS-3) liegt der  $MAPE_{pess}$  bei 8.0% (*zweiwöchiger*  $VaR(95\%)$ :  $MAPE_{pess} = 10.3\%$ ). Wie die PCA-Grid-Methode überschätzt auch die PLS-Grid-Methode aufgrund der Grid-Approximation das Verlustpotenzial. Dies führt dazu, dass bei zusätzlicher Berücksichtigung weiterer PLS-Faktoren die Überschätzungen zunehmen. Diese Überschätzungen können durch feinere Grid-Modellierung reduziert werden.

---

<sup>101</sup> Die Verbindungslinien (lineare Interpolation) der Grid-Punkte liegen beim vorliegenden SCF-Portfolio immer unterhalb der wahren G/V-Funktion und überschätzen so das Verlustpotenzial. Der Fehler wird kleiner, wenn bei der Approximation zusätzliche Grid-Punkte berücksichtigt werden.

## 5.5 Digital-Option-Portfolio

### 5.5.1 Testanordnung des DO-Portfolios

Das DO-Portfolio steht stellvertretend für den Portfoliotyp "komplexes Portfolio". Digital-Optionen, auch Cash-or-Nothing-Optionen genannt, bieten aufgrund ihrer besonderen G/V-Eigenschaften<sup>102</sup> die beste Voraussetzung für den Erhalt eines Portfolios mit einer möglichst komplexen G/V-Funktion.

Die verwendeten (europäischen-) Digital-Optionen beziehen sich jeweils auf LIBOR-Sätze (Underlying). Bei einer Call-Digital-Option leistet der Optionsverkäufer (Stillhalter) eine fixe Auszahlung (Cash-Payment) an den Optionskäufer, falls am Ende der Optionslaufzeit der LIBOR-Satz über der anfänglich festgelegten Strike-Rate liegt. Die Höhe der Auszahlung ist also unabhängig davon, wie weit der LIBOR-Satz am Ende der Optionslaufzeit über der Strike-Rate liegt. Liegt der LIBOR-Satz am Laufzeitende unter der Strike-Rate, so verfällt die Digital-Option wertlos.

Bei einer Put-Digital-Option kommt es entsprechend zu einer fixen Auszahlung, falls der LIBOR-Satz unter der vereinbarten Strike-Rate liegt. Andernfalls verfällt auch sie wertlos.

Für die Untersuchung werden 100 Testportfolios zusammengestellt. Jedes Testportfolio enthält 500 kurzfristige Digital-Optionen, deren Eigenschaften wiederum zufällig bestimmt werden. Die Preise der Digital-Optionen werden mit dem Reiner/Rubinstein-Bewertungsmodell<sup>103</sup> bestimmt. Die Detailspezifikationen des DO-Portfolios sind in der Tabelle 5-11 zusammengefasst.

---

<sup>102</sup> Bei sehr kurzer Laufzeit verläuft die Preisfunktion von Digital-Optionen im Bereich der Strike-Rate beinahe sprunghaft. Vgl. Engeler (1998), S. 195-198

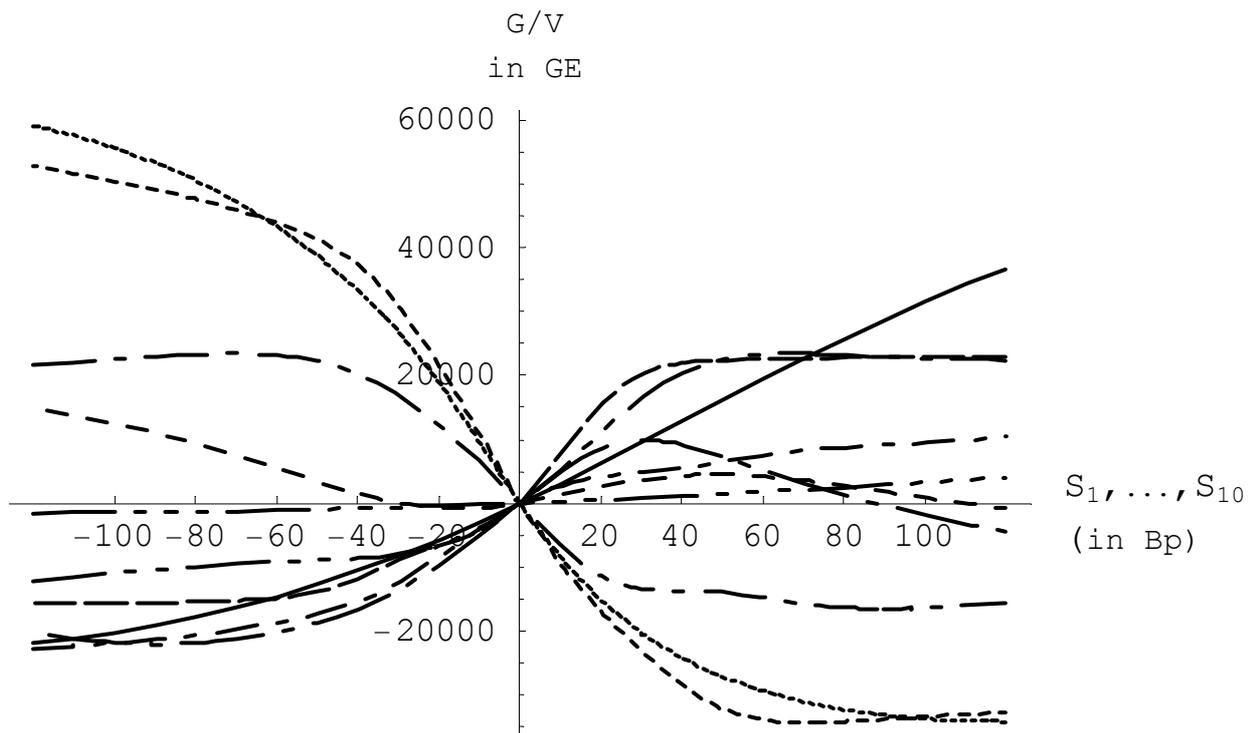
<sup>103</sup> Vgl. Reiner/Rubinstein (1992), S. 59-63

Tabelle 5-11: Zusammensetzung des DO-Portfolios

Art und Anzahl der Instrumente	500 Digital-Optionen. Zufällig Call- oder Put-Digital-Option (gleichverteilt)
Position	Zufällig Short oder Long (gleichverteilt)
Auszahlung (Cash Payment)	Zufällig zwischen 1'000 und 10'000 GE (gleichverteilt)
Restlaufzeit der Option	Zufällig 1,2,...,7 Tage (gleichverteilt) + VaR-Haltedauer
Underlying	Referenzzinssatz der Optionen wird zufällig bestimmt. Zur Verfügung stehen dabei (gleichverteilt): 1- und 2-wöchiger-LIBOR-Satz sowie 1-, 2-, 3-, 4- und 5-Monats-LIBOR-Satz
Volatilität	Die Volatilität des Underlyings beträgt 40% p.a.
Strike-Rate	Gleichverteilt im Bereich: Aktueller Wert des ausgewählten LIBOR-Satzes plus/minus das Dreifache seiner täglichen Volatilität

Die Testzinskurven werden zufällig (gleichverteilt) aus dem Zinskurvenset "Optionsportfolio" ausgewählt, die VaR-Methoden werden mit 10'000 MC-Szenarien durchgeführt, und die Volatilitäten der Underlyings werden als konstant angenommen.

In Abbildung 5-7 ist die G/V-Funktion eines zufällig ausgewählten Testportfolios dargestellt.

Abbildung 5-7: G/V-Funktion des DO-Portfolios<sup>104</sup>

### 5.5.2 Testresultate des DO-Portfolios

In der Tabelle 5-12 sind die Resultate für den *eintägigen VaR(99%)* aufgeführt. Die weiteren Resultate finden sich im Anhang.<sup>105</sup>

<sup>104</sup> Illustratives Beispiel. Die Linien wiedergeben den Gewinn/Verlust-Verlauf des Portfolios in Abhängigkeit der zehn Marktfaktoren.

<sup>105</sup> Tabelle 9-13: Eintägiger VaR(95%) des DO-Portfolios, S. 207,  
Tabelle 9-14: Zweiwöchiger VaR(95%) des DO-Portfolios, S. 208,  
Tabelle 9-16: Zweiwöchiger VaR(99%) des DO-Portfolios, S. 210

Tabelle 5-12: Eintägiger VaR(99%) des DO-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> In %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	Opt	11.3	9.4	45	16.7	26.3	35	10.9	20.8	20
	neut	14.0	9.3	45	20.3	26.6	35	13.4	22.7	20
	peess	17.0	9.2	45	23.8	27.0	35	15.9	24.8	20
Delta-Gamma	Opt	8.9	7.9	6	9.7	14.5	37	4.1	11.0	57
	neut	11.7	7.7	6	13.3	14.4	37	5.6	12.4	57
	peess	15.3	7.7	6	16.6	14.4	37	7.0	13.9	57
PCA-1	Opt	53.2	28.7	98	0.0	0.0	0	52.1	59.8	2
	neut	54.6	27.8	98	0.0	0.0	0	53.5	60.6	2
	peess	56.1	26.9	98	0.0	0.0	0	55.0	61.6	2
PCA-2	Opt	26.8	21.9	94	0.0	0.0	0	25.1	33.5	6
	neut	29.0	21.2	94	0.0	0.0	0	27.2	34.8	6
	peess	31.3	20.6	94	0.0	0.0	0	29.4	36.3	6
PCA-3	Opt	19.4	17.3	93	0.0	0.0	0	18.0	25.0	7
	neut	21.8	16.7	93	0.0	0.0	0	20.3	26.5	7
	peess	24.4	16.1	93	0.0	0.0	0	22.6	28.2	7
PCA-4	Opt	13.9	11.8	87	2.1	0.5	2	12.1	17.0	11
	neut	16.5	11.3	87	5.8	0.5	2	14.4	18.7	11
	peess	19.3	10.9	87	8.6	0.5	2	16.9	20.7	11
PCA-5	Opt	12.8	11.3	76	4.1	3.0	2	9.7	14.8	22
	neut	15.4	10.8	76	7.9	3.1	2	11.8	16.4	22
	peess	18.2	10.4	76	10.8	3.2	2	13.9	18.3	22
PLS-1	Opt	15.5	10.3	90	0.9	0.0	1	13.9	17.6	9
	neut	18.0	10.0	90	2.8	0.0	1	16.2	19.6	9
	peess	20.7	9.7	90	4.2	0.0	1	18.7	21.7	9
PLS-2	Opt	6.1	6.5	64	5.3	5.8	3	4.1	7.3	33
	neut	8.9	6.3	64	8.8	6.2	3	6.0	9.0	33
	peess	11.9	6.1	64	12.3	6.5	3	8.0	11.0	33
PLS-3	Opt	4.9	4.9	43	3.0	3.2	11	2.5	4.8	46
	neut	7.8	4.7	43	6.4	3.4	11	4.1	6.4	46
	peess	10.8	4.6	43	9.4	3.5	11	5.7	8.4	46
PLS-4	Opt	4.3	4.6	41	2.6	2.9	12	2.1	4.2	47
	neut	7.2	4.3	41	5.8	3.4	12	3.6	5.8	47
	peess	10.2	4.0	41	8.8	3.1	12	5.3	7.7	47
PLS-5	Opt	4.7	5.1	42	2.8	2.8	14	2.4	4.7	44
	neut	7.6	4.8	42	6.3	3.0	14	4.1	6.4	44
	peess	10.6	4.5	42	9.4	2.8	14	5.8	8.3	44

### Delta-Methode beim DO-Portfolio

Mit der Delta-Methode kann das Risiko des komplexen Portfolios nicht mehr vernünftig eingeschätzt werden.

Der eintägige VaR(99%) wird lediglich in 20% der Fälle richtig berechnet (eintägiger VaR(95%): %A<sup>0</sup> = 19%). In 45% der Fälle wird der VaR um durchschnittlich  $MW_{neut}^- = 14.0\%$  unterschätzt und in 35% der Fälle um durchschnittlich  $MW_{neut}^+ = 20.3\%$  überschätzt (eintägiger VaR(95%):  $MW_{neut}^- = 11.5\%$ ,  $MW_{neut}^+ = 18.2\%$ ). Es resultiert ein  $MAPE_{neut}$  von 13.4% (eintägiger VaR(95%):  $MAPE_{neut} = 11.4\%$ ).

Beim *zweiwöchigen VaR(99%)* beträgt die Wahrscheinlichkeit eines genauen Resultats nur noch 4%. In 70% der Fälle wird der VaR um durchschnittlich  $MW_{neut}^- = 52\%$  unterschätzt und in 26% der Fälle um durchschnittlich  $MW_{neut}^+ = 7.4\%$  überschätzt. Die Tendenz zur Unterschätzung lässt sich auf die spezifische G/V-Funktion des Testportfolios zurückführen. Wie die Abbildung 5-7 zeigt, ist das Verlustpotenzial dadurch beschränkt, dass sich die Anzahl der Call- und Put-Optionen sowie der Long- und Short-Positionen durch die gewählte Portfoliokonstruktion in etwa die Waage halten (gleichverteilt).

### **Delta-Gamma-Methode beim DO-Portfolio**

Während die Delta-Gamma-Methode beim *eintägigen VaR* noch akzeptable Resultate liefert, ist das beim *zweiwöchigen VaR* nicht mehr der Fall.

Beim *eintägigen VaR(99%)* sind in 57% der Fälle die Resultate richtig (*eintägiger VaR(95%):*  $\%A^0 = 60\%$ ). In 37% der Fälle kommt es zu einer Überschätzung, die im Mittel  $MW_{neut}^+$  13.3% beträgt. Bei den restlichen 6% der Fälle wird der VaR um durchschnittlich  $MW_{neut}^- = 11.7\%$  unterschätzt. Der  $MAPE_{neut}$  beträgt nur 5.6% (*eintägiger VaR(95%):*  $MAPE_{neut} = 3.5\%$ ). Man stellt fest, dass die Delta-Gamma-Methode gleich wie die Delta-Methode zur Überschätzung des VaR tendiert, was wiederum auf die Zusammensetzung des Portfolios zurückzuführen ist. Die Überschätzung ist bei der Delta-Gamma-Methode noch ausgeprägter, da der Gamma-Term den Effekt zusätzlich verstärkt.

Beim *zweiwöchigen VaR(99%)* gelten nur noch 8% der Fälle als richtig berechnet (*zweiwöchiger VaR(95%):*  $\%A^0 = 7\%$ ). Wie aufgrund der spezifischen G/V-Funktion zu erwarten war, überschätzt die Delta-Gamma-Methode in den meisten Fällen den VaR. Der *zweiwöchige VaR(99%)* wird in 88% der Fälle um durchschnittlich  $MW_{neut}^+ = 58.7\%$  überschätzt (*zweiwöchiger VaR(95%):*  $\%A^+ = 84\%$ ,  $MW_{neut}^+ = 40.8\%$ ). Selbst unter optimistischer Sichtweise beträgt der  $MAPE_{opt}$  immer noch 48.2% (*zweiwöchiger VaR(95%):*  $MAPE_{opt} = 32.2\%$ ).

### **PCA-Grid-Methode beim DO-Portfolio**

Die Resultate der PCA-Grid-Methode kommen beim *eintägigen VaR* zwar nicht an jene der Delta-Gamma-Methode heran, sind aber bei der Berechnung des *zweiwöchigen VaR* verlässlicher.

Wie zuvor erwähnt, werden mit der PCA-Grid-Methode die Resultate oftmals unterschätzt, wenn nur wenige PCA-Faktoren berücksichtigt werden. Werden bei der Berechnung des *eintägigen VaR(99%)* drei PCA-Faktoren berücksichtigt (PCA-3), so unterschätzen sie in 93% der Fälle den VaR (*eintägiger VaR(95%)*:  $\%A^- = 93\%$ ). Die mittlere Unterschätzung beträgt unter optimistischer Sichtweise  $MW_{opt}^- = 19.4\%$  (*eintägiger VaR(95%)*:  $MW_{opt}^- = 19.6\%$ ).

Auch wenn fünf PCA-Faktoren berücksichtigt werden (PCA-5), liegen immer noch 76% der Resultate unter dem wahren VaR, wobei unter optimistischer Sichtweise die durchschnittliche Unterschätzung auf  $MW_{opt}^- = 12.8\%$  abnimmt (*eintägiger VaR(95%)*:  $\%A^- = 76\%$ ,  $MW_{opt}^- = 12.9\%$ ). Der  $MAPE_{opt}$  liegt bei 9.7% (*eintägiger VaR(95%)*:  $MAPE_{opt} = 10.0\%$ ) und damit um einiges höher als der entsprechende  $MAPE_{opt}$  der Delta-Gamma-Methode ( $MAPE_{opt} = 4.1\%$ ) oder der der PLS-Methode (PLS-3: 2.5%).

Werden zur Berechnung des *zweiwöchigen VaR(99%)* drei PCA-Faktoren berücksichtigt (PCA-3), so wird der VaR in 98% der Fälle unterschätzt, wobei die durchschnittliche Unterschätzung  $MW_{opt}^- = 25.2\%$  beträgt. Setzt man fünf PCA-Faktoren ein, so liegt der Anteil der unterschätzten Resultate immer noch bei 96% und die durchschnittliche Unterschätzung  $MW_{opt}^-$  bei 19.4%. Der  $MAPE_{opt}$  von 18.6% liegt somit deutlich unter jenem der Delta-Gamma-Methode ( $MAPE_{opt} = 48.2\%$ ). Für den *zweiwöchigen VaR(95%)* ergeben sich vergleichbare Resultate.

### PLS-Grid-Methode beim DO-Portfolio

Die PLS-Grid-Methode produziert beim komplexen Portfolio die exaktesten Resultate.

Beim *eintägigen VaR(99%)* genügen schon zwei PLS-Faktoren (PLS-2) um einen akzeptablem  $MAPE_{neut}$  von 6.0% zu erhalten (*eintägiger VaR(95%)*:  $MAPE_{neut} = 5.3\%$ ). Bei drei PLS-Faktoren (PLS-3) reduziert sich der  $MAPE_{neut}$  sogar auf 4.1% (*eintägiger VaR(95%)*:  $MAPE_{neut} = 3.8\%$ ). Jeder weitere PLS-Faktor besitzt kaum noch Erklärungskraft, und es verbleibt eine PLS-Restabweichung von rund 2 bis 6%.

Beim *zweiwöchigen VaR(99%)* schneidet ebenfalls die PLS-Grid-Methode am besten ab. Der Fehler liegt bei zwei PLS-Faktoren (PLS-2) schon bei  $MAPE_{neut} = 10.9\%$  (*zweiwöchiger VaR(95%)*:  $MAPE_{neut} = 11.0\%$ ), doch der dritte und alle weiteren PLS-Faktoren können

die Resultate nicht mehr substantiell verbessern. Der *MAPE* liegt in der Grössenordnung von 10%.

## 5.6 Genauigkeit alternativer PLS-Grid-Modelle

In diesem Abschnitt soll analysiert werden, wie die Genauigkeit der PLS-Grid-Methode in Bezug auf alternative PLS-Grid-Modelle reagiert.

### 5.6.1 PLS-Grid-Modelle mit unterschiedlicher Anzahl Grid-Punkte

Bislang wurde der PLS-Grid immer nach dem gleichem Muster modelliert. Der erste Faktor wurde mit 7 der zweite mit 5 und alle weiteren mit 3 Grid-Punkten ausgestattet. Der Grid-Modellierung sind aber kaum Grenzen gesetzt. Deshalb sollen alternative Grid-Modelle zu Vergleichszwecken getestet werden.

Um einen groben Eindruck des Einflusses der Grid-Modellierung auf die Genauigkeit zu erhalten, wird bei der Berechnung des *eintägigen VaR(99%)* des DO-Portfolios die G/V-Funktion mit unterschiedlich vielen Grid-Punkten approximiert. Die Resultate sind in Tabelle 5-13 wiedergegeben.

Tabelle 5-13: Alternative Grid-Modellierung (Eintägiger VaR(99%); DO-Portfolio)

Grid-Modell	$MAPE_{neut}$	$RMSPE_{neut}$
2x2x2-PLS-Grid	62.4%	84.6%
3x3x3-PLS-Grid	13.7%	18.4%
5x3x3-PLS-Grid	5.3%	8.1%

Wird zur G/V-Approximation ein 2x2x2-PLS-Grid gewählt, so ist der damit verbundene Approximationsfehler sehr gross. Unter neutraler Sichtweise beträgt der  $RMSPE_{neut}$  84.6%. Das entspricht beinahe dem Vierfachen des entsprechenden Fehlers der Delta-Methode ( $RMSPE_{neut} = 22.7\%$ ).

Mit einem 3x3x3-Grid hingegen ist die PLS-Grid-Methode aber mit einem  $RMSPE_{neut}$  von 18.4% bereits genauer als die Delta-Methode. Wird nur der erste PLS-Faktor mit zwei Grid-Punkten mehr ausgestattet, so verbessern sich die Resultate nochmals nachhaltig. Der  $RMSPE_{neut}$  des 5x3x3-Grids beträgt 8.1%. Somit kommt der 5x3x3-Grid<sup>106</sup> mit einem  $RMSPE_{neut}$  von 6.4% bereits nahe an die Qualität des 7x5x3-Grids heran (vgl. Tabelle 5-14).

<sup>106</sup> In der Tabelle 5-14 als PLS-(5)-3 bezeichnet. Vgl. Abkürzungsverzeichnis der getesteten Monte-Carlo-Methoden auf S. xxi

Tabelle 5-14: 5x3x3-PLS-Grid (eintägiger VaR(99%); DO-Portfolio)

PLS (5) -1	opt	15.3	10.2	93	0.0	0.0	0	14.2	17.8	7
	neut	17.9	10.0	93	0.0	0.0	0	16.6	19.7	7
	pess	20.6	9.6	93	0.0	0.0	0	19.1	21.9	7
PLS (5) -2	opt	8.4	7.2	57	4.3	5.5	3	4.9	8.4	40
	neut	11.1	7.0	57	7.5	6.2	3	6.6	10.1	40
	pess	14.0	6.7	57	11.1	6.3	3	8.4	12.0	40
PLS (5) -3	opt	6.3	6.3	50	2.9	3.0	12	3.5	6.4	38
	neut	9.1	6.0	50	6.2	3.2	12	5.3	8.1	38
	pess	12.1	5.7	50	9.3	3.3	12	7.2	10.1	38
PLS (5) -4	opt	5.9	6.1	50	3.7	3.1	11	3.3	6.2	39
	neut	8.7	5.8	50	7.1	3.3	11	5.2	7.9	39
	pess	11.7	5.5	50	10.2	3.2	11	7.0	9.8	39

Da der erste PLS-Faktor am meisten Erklärungskraft besitzt, sollte er deshalb mit genügend Grid-Punkten modelliert werden. Bei den vorliegenden Untersuchungen haben sich vor allem fünf bis sieben Grid-Punkte bewährt. Bei weniger Grid-Punkten wuchs der Approximationsfehler rasch, und bei mehr als sieben Grid-Punkten konnte keine merkliche Verbesserung mehr festgestellt werden.

Beim zweiten PLS-Faktor lieferten drei bis fünf Grid-Punkte gute Resultate. Für die Modellierung des dritten und aller weiterer PLS-Faktoren genügten jeweils drei Grid-Punkte, da diese Faktoren nur noch einen geringen Einfluss auf die Genauigkeiten hatten.

### 5.6.2 PLS-Grid-Modelle mit unterschiedlicher Anzahl Pre-Calculations

In diesem Unterabschnitt wird untersucht, wie sich die Genauigkeit der PLS-Grid-Methode bei unterschiedlicher Anzahl Pre-Calculations verändert.

Bisher operierte die PLS-Methode immer mit einem Pre-Calculation-Datenset mit 500 Marktszenarien. Neu wird die Anzahl der Pre-Calculations auf 100 Marktszenarien reduziert.

Wie die Resultate in Tabelle 5-15 zeigen, kann das abgeänderte PLS-Grid-Modell (PLS\*) immer noch eine sinnvolle Extraktion der PLS-Faktoren gewährleisten. Der Approximationsfehler ist z.B. bei der Berechnung des *zweiwöchigen VaR(99%)* des DO-Portfolios nur geringfügig grösser als der, des ursprünglichen PLS-Grid-Modells.

Bei Berücksichtigung von drei Faktoren (PLS\*-3) resultiert z.B. ein  $MAPE_{neut}$  von 11.2% (PLS-3:  $MAPE_{neut} = 9.1\%$ ). Auch beim *zweiwöchigen VaR(95%)* liegt der  $MAPE_{neut}$  mit

11.5% nahe beim entsprechenden Wert des ursprünglichen PLS-Grid-Modells (PLS-3:  $MAPE_{neut} = 9.5\%$ ).<sup>107</sup>

Tabelle 5-15: PLS-Grid-Modell mit 100 Pre-Calculations (zweiwöchiger VaR(99%); DO-Portfolio)

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
PLS <sup>+</sup> -1	opt	26.9	20.6	87	5.6	6.7	6	23.7	31.7	7
	neut	28.8	20.2	87	8.9	7.3	6	25.6	33.0	7
	poess	30.8	19.7	87	12.7	8.9	6	27.6	34.3	7
PLS <sup>+</sup> -2	opt	13.9	11.1	73	2.3	2.1	13	10.5	15.2	14
	neut	16.1	10.9	73	5.3	2.4	13	12.5	16.8	14
	poess	18.4	10.8	73	8.7	3.1	13	14.6	18.5	14
PLS <sup>+</sup> -3	opt	12.1	10.5	74	2.1	2.7	8	9.2	13.9	18
	neut	14.5	10.2	74	5.4	2.7	8	11.2	15.4	18
	poess	16.8	10.0	74	9.0	3.0	8	13.2	17.1	18
PLS <sup>+</sup> -4	opt	12.3	10.9	76	3.9	2.8	6	9.6	14.4	18
	neut	14.6	10.7	76	7.1	3.2	6	11.6	15.9	18
	poess	17.0	10.5	76	10.7	3.5	6	13.6	17.6	18
PLS <sup>+</sup> -5	opt	13.3	11.1	79	5.2	3.2	5	10.8	15.4	16
	neut	15.6	10.8	79	8.6	3.5	5	12.8	17.0	16
	poess	17.9	10.6	79	12.3	3.4	5	14.8	18.7	16

### 5.6.3 PLS-Grid-Modelle mit unterschiedlicher G/V-Ermittlung der Pre-Calculations

Nachdem untersucht wurde, wie die Genauigkeit der PLS-Grid-Methode reagiert, wenn die Anzahl Pre-Calculations gesenkt wird, soll in einem weiteren und letzten Schritt ermittelt werden, was passiert, wenn zusätzlich zur Reduktion des Datensets auch noch die G/V-Werte der Pre-Calculations mit Hilfe der Delta-Gamma-Approximation bestimmt werden.

Beim PLS\*\*-Modell (100 Delta-Gamma-approximierte Pre-Calculations) steigt der Approximationsfehler im Vergleich zum ursprünglichen PLS-Grid-Modell nicht übermäßig. Zwar beträgt der  $MAPE_{neut}$  bei der Berechnung des zweiwöchigen VaR(99%) des DO-Portfolios 13.2% und liegt um 4.1% höher als der entsprechende Wert des ursprünglichen Modells. Aber im Vergleich zum  $MAPE_{neut}$  der Delta-Gamma-Methode von 52.0% ist die Zunahme des Approximationsfehlers bescheiden. Ähnliches lässt sich bei der Berechnung des zweiwöchigen VaR(95%) feststellen.

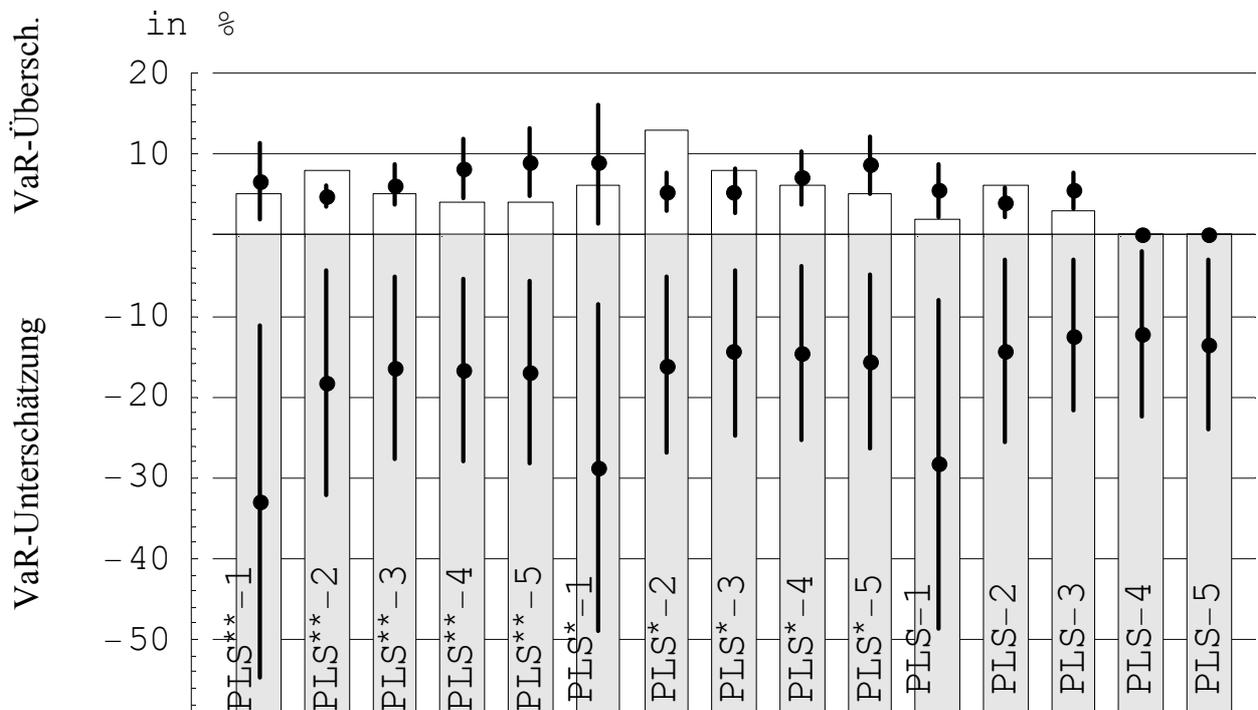
<sup>107</sup> Vgl. Tabelle 9-15: Alternative PLS-Grid-Modelle (Zweiwöchiger VaR(95%); DO-Portfolio), S. 209

Tabelle 5-16: PLS-Grid-Modell mit 100 Delta-Gamma-approximierten Pre-Calculations (zweiwöchiger VaR(99%); DO-Portfolio)

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
PLS <sup>**</sup> -1	opt	31.2	22.2	87	4.0	3.8	5	27.4	35.8	8
	neut	33.0	21.7	87	6.7	4.8	5	29.1	36.9	8
	pess	34.9	21.2	87	10.4	6.4	5	30.9	38.2	8
PLS <sup>**</sup> -2	opt	16.1	14.0	79	1.6	1.5	8	12.9	19.0	13
	neut	18.3	13.8	79	4.8	1.4	8	14.9	20.5	13
	pess	20.6	13.6	79	8.3	1.9	8	16.9	22.1	13
PLS <sup>**</sup> -3	opt	14.2	11.6	78	3.1	2.5	5	11.2	16.2	17
	neut	16.5	11.4	78	6.2	2.5	5	13.2	17.8	17
	pess	18.7	11.2	78	9.7	3.0	5	15.1	19.4	17
PLS <sup>**</sup> -4	opt	14.5	11.4	78	4.7	3.3	4	11.5	16.3	18
	neut	16.7	11.2	78	8.1	3.7	4	13.4	17.9	18
	pess	19.0	11.1	78	11.7	4.1	4	15.3	19.6	18
PLS <sup>**</sup> -5	opt	14.8	11.5	80	5.6	3.8	4	12.1	16.8	16
	neut	17.1	11.3	80	9.0	4.3	4	14.0	18.4	16
	pess	19.3	11.1	80	12.6	4.5	4	16.0	20.1	16

In Abbildung 5-8 werden die Resultate der Untersuchung alternativer PLS-Grid-Modelle grafisch dargestellt. Wie man sieht, unterscheiden sich die Approximationsfehler der PLS-Grid-Modelle nicht merklich.

Abbildung 5-8: Fehleranalyse alternativer PLS-Grid-Modelle unter neutraler Sichtweise (zweiwöchiger VaR(99%); DO-Portfolio)



Wie die durchgeführten Analysen zeigen, ist die PLS-Grid-Methode, selbst bei einem sehr komplexen Portfolio befähigt, die risikorelevanten Faktoren auf der Grundlage eines kleinen Pre-Calculation-Datensets, dessen G/V-Werte Delta-Gamma-approximiert sind, zu ermitteln.

## 5.7 Zusammenfassung

Kapitel 5 berichtete über die Resultate der Genauigkeitsanalyse, die auf Ebene ausgewählter Portfoliogruppen durchgeführt wurde. Bei den Bond-Portfolios wurde die Genauigkeit separat auf Währungsebene ermittelt. Wie die Testresultate zeigen, ist die Genauigkeit der Methoden kaum von der währungsspezifischen Dynamik der Zinskurven betroffen, wohl aber von der G/V-Charakteristik des zu Grunde liegenden Portfolios.

### 5.7.1 Lineares Portfolio

Der VaR von linearen Portfolios lässt sich mit MC-Methoden basierend auf Taylor-Approximationen mit zufriedenstellender Genauigkeit berechnen. Sind die G/V-Funktionen noch leicht konvex, wie es dies bei den ausgewählten Bondportfolios der Fall ist, so sind die Resultate der Delta-Gamma-Methode denjenigen der Delta-Methode leicht überlegen, vor allem in Bezug auf die Berechnung des *zweiwöchigen VaR*.

Die PCA-Grid-Methode liefert lediglich beim LB-Portfolio verlässliche Resultate. Wenn das Bondportfolio aber nicht primär auf eine parallele Zinsbewegung reagiert (die meist durch den ersten PCA-Faktor beschrieben wird), so unterschätzt die PCA-Grid-Methode das Verlustpotenzial erheblich.

Die PLS-Grid-Methode ist zwar in der Lage, die risikorelevanten Marktfaktorbewegungen aufzudecken. Aber aufgrund der resistenten PLS-Restabweichung sind die Resultate von der Qualität her schlechter als diejenigen der Delta- oder der Delta-Gamma-Methode.

### 5.7.2 Konvexes Portfolio

Beim konvexen Portfolio liefert die Delta-Gamma-Methode für den *eintägigen VaR* die genauesten Resultate, gefolgt von den Grid-Methoden. Beim *zweiwöchigen VaR* sind hingegen die Grid-Modelle exakter, da die Delta-Gamma-Methode die Krümmungsveränderung des Portfolios nicht nachvollziehen kann. Weit abgeschlagen sind die Resultate der Delta-Methode.

### 5.7.3 Komplexes Portfolio

Beim komplexen Portfolio in Gestalt des DO-Portfolios macht sich erstmals der Rechenaufwand der PLS-Grid-Methode bezahlt. Zwar liefern für den *eintägigen VaR* auch die Delta-Gamma-Methode und die PCA-Grid-Methode befriedigende Resultate, doch bei der Berechnung des *zweiwöchigen VaR* sind die Resultate der PLS-Grid-Methode den übrigen deutlich überlegen.

## 6 Messung des Rechenaufwands

Nachdem im letzten Kapitel die Genauigkeiten der verschiedenen MC-Methoden untersucht wurden, wird in diesem Kapitel nun deren Rechenaufwand analysiert. Wie die Genauigkeit ist auch der Rechenaufwand ein wichtiges Kriterium bei der Wahl der geeigneten VaR-Methode,<sup>1</sup> insbesondere dann, wenn beabsichtigt wird, mit Hilfe des VaR das tägliche Handelsgeschäft "intra-day" zu steuern und zu überwachen.<sup>2</sup>

Grundsätzlich kann der MC-Rechenaufwand gemindert werden, indem

- rechengünstige Bewertungsmodelle zum Einsatz kommen,<sup>3</sup>
- zusätzliche Rechenleistung zur Verfügung gestellt wird<sup>4</sup> oder
- geeignete Approximationstechniken eingesetzt werden.

Auf die ersten beiden Punkte wird im Rahmen dieser Arbeit nicht näher eingegangen. In diesem Kapitel soll lediglich untersucht werden, wie stark sich der Rechenaufwand der MC-Simulation durch die G/V-Approximationen verkleinern lässt.<sup>5</sup>

Abschnitt 6.1 gibt zunächst einen Überblick über die Rechenprozesse und die notwendigen Systeme, die zur Ermittlung des VaR eingesetzt werden. In Abschnitt 6.2 folgt eine Eingrenzung der Untersuchung auf die *methodenspezifischen* Rechenaufwände. Das sind diejenigen Rechenprozesse, die speziell bei einer bestimmten Methode anfallen.

Anhand eines Referenzportfolios werden die CPU-Zeiten der notwendigen Berechnungen gemessen. Da die Instrumentenbewertungen am rechenaufwändigsten sind, wird für jede MC-Methode die Anzahl notwendiger Instrumentenbewertungen analysiert und in Abschnitt 0 verglichen. Zusätzlich wird untersucht, wie die Rechenaufwände der MC-Methoden reagieren, wenn z.B. die Anzahl MC-Szenarien, die Anzahl zu berücksichtigender Faktoren bei der Grid-Approximation oder die Anzahl preisrelevanter Marktfaktoren pro Instrument verändert wird. In Abschnitt 6.4 werden die Ergebnisse abschliessend zusammengefasst.

---

<sup>1</sup> Davidson (1997), S. 14

<sup>2</sup> Vgl. Cardenas et.al (1999), S. 55; Frye (1998), S. 66

<sup>3</sup> Vgl. Carverhill/Clewlow (1994); Boyle/Broadie/Glassermann (1997); Barone-Adesi/Whaley (1987); Brotherton-Ratcliff (1994)

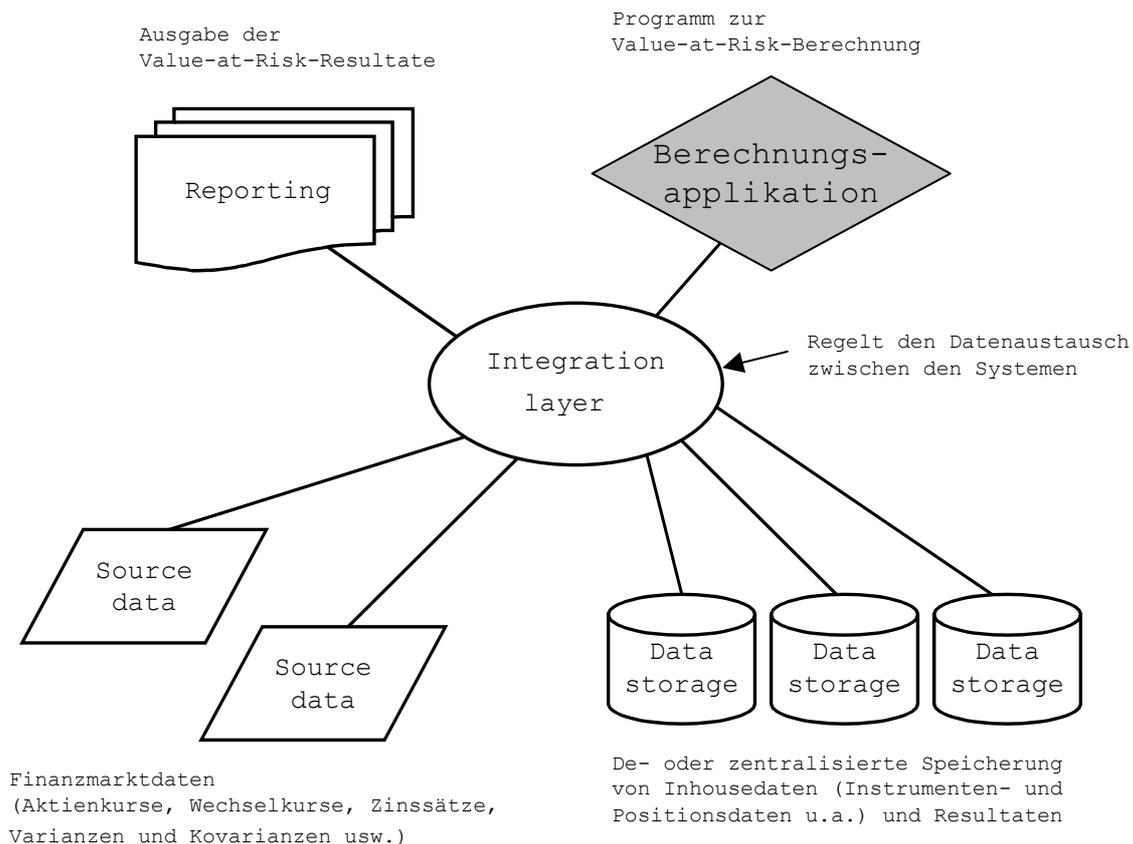
<sup>4</sup> Z.B. durch leistungsfähigere Prozessoren oder parallel-prozessierende Rechner

<sup>5</sup> Für alternative Approximationsmethoden, wie z.B. die Varianz-Reduktionstechniken, sei auf die entsprechende Spezialliteratur verwiesen. Vgl. MC-Methoden mit Varianz-Reduktionstechniken. S. 5

## 6.1 Rechenaufwände im Überblick

Abbildung 6-1 vermittelt zunächst einen groben Überblick über die Prozesse und Systeme, die bei der VaR-Messung zum Einsatz kommen.

Abbildung 6-1: Beteiligte Systeme der VaR-Berechnung



Quelle: Eigene Darstellung in Anlehnung an Williams (1997)

Neben der eigentlichen Berechnungsapplikation (grau hervorgehoben) sind eine Reihe weiterer Systeme und Prozesse an der VaR-Messung beteiligt. So braucht es Schnittstellen zu Informationsanbietern, welche die notwendigen Marktdaten liefern (Aktienkurse, Zinssätze, Wechselkurse, Kovarianzen usw.), Datenbanken, welche die Rohdaten (Daten der Finanzinstrumente, Positionen u.a.) enthalten und in denen die VaR-Resultate gespeichert werden können, ein Reporting-System, mit dem die Resultate der Risikomessung aufbereitet und ausgegeben werden, sowie einen "integration layer" ("middle ware" oder "integration ware"), der den Datenaustausch zwischen den Systemen ermöglicht und steuert.

Um die Untersuchung des Rechenaufwands in einem einfachen und überschaubaren Rahmen zu halten, richtet sich der Fokus auf die Phase der Berechnungsapplikation, in der

nach Aufbereitung der Markt-<sup>6</sup> und Instrumentendaten die eigentliche VaR-Kalkulation stattfindet.

Es sei daran erinnert, dass bei allen vorgestellten Methoden die VaR-Berechnung in drei Schritten erfolgt:<sup>7</sup>

MC-Schritt 1: Erzeugung der MC-Szenarien

MC-Schritt 2: Ermittlung der G/V-Werte der Szenarien

MC-Schritt 3: Anordnung der Resultate und Bestimmung des VaR

Bei allen Methoden sind die Rechenprozesse für den 1. und 3. Schritt identisch. Einzig beim zweiten MC-Schritt unterscheiden sich die Methoden in der Art und Weise, wie sie die G/V-Werte der MC-Szenarien berechnen. Die Analyse des Rechenaufwands konzentriert sich daher hauptsächlich auf den MC-Schritt 2, der die *methodenspezifischen* Berechnungen umfasst. Hierzu zählen im Besonderen die Instrumentenberechnungen,<sup>8</sup> denen aus aufwandtechnischer Sicht eine zentrale Bedeutung zukommt.<sup>9</sup>

Betrachtet wird das SCF-Portfolio mit insgesamt 500 Optionen<sup>10</sup>, das in diesem Kapitel als *Referenzportfolio* dienen soll.

Eigene Messungen haben ergeben, dass ein Pentium-Computer mit 450 MHz zur VaR-Berechnung des Referenzportfolios mittels 10'000 MC-Szenarien und jeweiliger vollständiger Instrumentenneubewertung (Full-MC-Methode) über eine Stunde Rechenzeit benötigt. Während die Rechenzeit für die Erzeugung der MC-Szenarien sowie für die Anordnung der Resultate zur Bestimmung des gewünschten Quantils (1. und 3. Schritt des MC-Ablaufs) nur Sekundenbruchteile in Anspruch nimmt, benötigt der MC-Schritt 2, bei dem 5 Mio. Instrumentenbewertungen<sup>11</sup> durchgeführt werden, eine Stunde und 10 Minuten (4200 Sek.) ununterbrochene Prozessorleistung (CPU-Zeit).

Die PCA-Grid-Methode (7x5x3-Grid) beschäftigt den Prozessor lediglich 47 Sekunden lang. Der Hauptaufwand (45 Sekunden) entfällt wiederum auf die Instrumentenberechnun-

<sup>6</sup> Z.B. Ermittlung der aktuellen Marktfaktorwerte (z.B. Bootstrapping der Zinskurven) oder Schätzung der Volatilitäten und Korrelationen der Marktfaktoren

<sup>7</sup> Vgl. 3.1.1 Prozessablauf der MC-Simulation, S.35

<sup>8</sup> Preisbestimmung der Instrumente

<sup>9</sup> Die Full-MC-Methode scheitert bei grossen Portfolios mit komplexen Instrumenten in der Regel an den aufwändigen Instrumentenneuberechnungen, wie das Beispiel von Chishti (1999) in der Einleitung aufgezeigt hat.

<sup>10</sup> Testportfolio der Genauigkeitsanalyse. Vgl. 5.4 Short-Caplet/Floorlet-Portfolio, S.140

<sup>11</sup> 10'000 · 500 Optionsbewertungen

gen, die zur Erstellung des 7x5x3-Grid notwendig sind.<sup>12</sup> Steht der Grid, so braucht die Methode zur Approximation<sup>13</sup> der G/V-Werte der 10'000 MC-Szenarien weniger als eine Sekunde.<sup>14</sup> Gleiches gilt auch für die Rechenprozesse des ersten und dritten MC-Schritts.

In der Tabelle 6-1 sind die CPU-Zeiten für das Referenzportfolio zusammengefasst.

*Tabelle 6-1: Rechenaufwände für das Referenzportfolio*

Rechenprozesse	Rechenaufwand (CPU-Zeit)
<b>MC-Schritt 1: Erzeugung der MC-Szenarien</b>	
Faktorzerlegung (Cholesky-Dekomposition)	Unter 1 Sek.
Erzeugung des Zufallsvektors (10 x 10'0000)	2 Sek.
Erzeugung der Marktfaktorzustände der MC-Szenarien	Unter 1 Sek.
<b>MC-Schritt 2: Ermittlung der G/V-Werte der Szenarien</b>	
Instrumentenneuberechnung:	
Full-MC-Methode	4200 Sek.
PCA-Grid-Methode	47 Sek.
<b>MC-Schritt 3: Anordnung der Resultate und Bestimmung des VaR</b>	
Sortierung der G/V-Werte (10'000 Stk.)	Unter 1 Sek.
Bestimmung des $\alpha$ -Quantils	Unter 1 Sek.

Eine Untersuchung des Rechenaufwands anhand der CPU-Zeiten wäre aber sehr aufwändig und intransparent, da die CPU-Zeiten von einer Vielzahl Faktoren abhängig sind.<sup>15</sup> Erschwerend kommt hinzu, dass sich sowohl die Leistung als auch die Verfahren, Programme und Algorithmen der Rechner kontinuierlich verbessern, so dass gemessene CPU-Zeiten ihre Aussagekraft schon bald wieder verlieren würden.

Aus diesem Grund wird in Anlehnung an die Arbeit von Pritsker (1996) für jede Methode die Anzahl notwendiger Instrumentenneuberechnungen bestimmt. Diese Messgrösse ist klar verständlich, leicht nachvollziehbar und vor allem unabhängig von der Hard- und Software des Rechners.

Ein Vergleich der Methoden auf Basis der Instrumentenneuberechnungen ist keine einschneidende Vereinfachung, da sie mit Abstand den grössten Rechenaufwand erfordern,

<sup>12</sup> Berechnung der G/V-Werte für die 7x5x3 = 105 Knoten-Punkte. Das Referenzportfolio mit den 500 Optionen muss somit 105 mal neu bewertet werden, was zu insgesamt 52'500 Instrumentenneuberechnungen führt.

<sup>13</sup> 10'000 lineare Interpolationen auf Basis des 3-dimensionalen PCA-Grids.

<sup>14</sup> Selbst wenn die G/V-Werte für 10'000 MC-Szenarien mit einem 6-dimensionalen Grid (7x5x3x3x3x3) approximiert werden, bewerkstelligt das der Rechner in weniger als 5 Sekunden.

<sup>15</sup> Art der Instrumente, der eingesetzten Preisfunktionen sowie der Soft- und Hardware des Rechners.

wie man anhand der Beispiele gesehen hat. Um aber die methodenspezifischen Berechnungen, die keine Instrumentenneuberechnung sind, nicht vollständig zu vernachlässigen, werden sie weiterhin mittels beanspruchter CPU-Zeit gemessen.

## 6.2 Methodenspezifischer Rechenaufwand

Zur Quantifizierung der Instrumentenneuberechnungen werden folgende Variablen eingeführt.

$A$  bezeichnet die Anzahl Instrumente<sup>16</sup> eines Portfolios, das von gesamthaft  $M$  Marktfaktoren abhängt.  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, M$  bezeichnet die Zahl der Instrumente, deren Preise von  $i$  verschiedenen Marktfaktoren abhängen.<sup>17</sup> Es gilt die Beziehung

$$A = \sum_{i=1}^M A_i . \quad (6-1)$$

### 6.2.1 Methodenspezifischer Rechenaufwand der Full-MC-Methode

Da bei der Full-MC-Methode für jedes der  $N^{MC}$  MC-Marktszenarien sämtliche Instrumente neu bewertet werden, ergeben sich daraus<sup>18</sup>

$$AIB^{FMC} = A \cdot N^{MC} \quad (6-2)$$

Instrumentenneuberechnungen. Ansonsten fallen keine weiteren methodenspezifischen Rechenprozesse mehr an.

Tabelle 6-2: Methodenspezifischer Rechenaufwand der Full-MC-Methode<sup>19</sup>

Berechnung	Rechenaufwand (CPU-Zeit)
Instrumentenneuberechnung	4200 Sek.

### 6.2.2 Methodenspezifischer Rechenaufwand der Delta-Methode

Bei der Delta- (und auch bei der Delta-Gamma-) MC-Methode müssen streng genommen keine Instrumentenneuberechnungen durchgeführt, sondern nur die Sensitivitäten (Deltas und Gammas) der Instrumente ermittelt werden. Weil aber zum einen die Sensitivitäten

<sup>16</sup> Es wird davon ausgegangen, dass alle Instrumente verschieden voneinander sind und separat berechnet werden müssen.

<sup>17</sup> Es gibt Instrumente, deren Preise nur von einem Marktfaktor abhängen, aber auch Instrumente, die von zwei und mehr Marktfaktoren abhängig sind.

<sup>18</sup>  $AIB$ : Anzahl Instrumenten-Berechnungen

<sup>19</sup> VaR-Berechnung des Referenzportfolios

nicht immer analytisch bestimmbar sind<sup>20</sup> und zum anderen der direkte Vergleich mit den übrigen Methoden ermöglicht werden soll, wird für die Untersuchung angenommen, dass die Portfoliosensitivitäten numerisch geschätzt werden.

Für ein Instrument, das von  $i$  Marktfaktoren abhängt, sind zur numerischen Schätzung des entsprechenden Instrumenten-Delta-Vektors  $2i$  Instrumentenneuberechnungen erforderlich.<sup>21</sup> Für den Portfolio-Delta-Vektor müssen demnach

$$AIB^{Del} = \sum_{i=1}^M A_i \cdot 2i \quad (6-3)$$

Instrumentenneuberechnungen durchgeführt werden.

Tabelle 6-3: Methodenspezifischer Rechenaufwand der Delta-Methode<sup>22</sup>

Rechenprozess	Rechenaufwand (CPU-Zeit)
Instrumentenneuberechnungen	8 Sek. <sup>23</sup>
Delta-Approximationen der G/V-Werte der 10'000 MC-Szenarien	unter 1 Sek.

### 6.2.3 Methodenspezifischer Rechenaufwand der Delta-Gamma-Methode

Neben dem Delta-Vektor muss bei der Delta-Gamma-Methode auch die Gamma-Matrix des Portfolios ermittelt werden. Werden zur numerischen Schätzung der Gamma-Matrix eines Instruments, das von  $i$  Marktfaktoren abhängt,  $2i^2$  Instrumentenberechnungen benötigt, so fallen zur Berechnung des Portfolio-Delta-Vektors und der Portfolio-Gamma-Matrix<sup>24</sup>

$$AIB^{DG} = \sum_{i=1}^M A_i \cdot 2i \cdot (1 + i) \quad (6-4)$$

<sup>20</sup> Es gibt (exotische) Optionen, deren Sensitivitäten nicht analytisch hergeleitet werden können (z.B. Amerikanische Optionen).

<sup>21</sup> Details hierzu finden sich im Anhang unter 8.8.1 Numerische Schätzung des Delta-Vektors, S.190

<sup>22</sup> VaR-Berechnung des Referenzportfolios

<sup>23</sup> Die selbst programmierte Prozedur in Mathematica bezieht bei der Ermittlung der Sensitivitäten jeweils alle im Portfolio enthaltenen Instrumente mit ein. So werden z.B. bei der Bestimmung der Sensitivität gegenüber dem ersten Marktfaktor auch Instrumente in die Berechnung miteinbezogen, die nicht vom ersten Marktfaktor abhängen. In der gemessenen Zeit werden demnach mehr Instrumentenneuberechnungen durchgeführt als theoretisch nötig wären. Deshalb ist hier die CPU-Zeit nur bedingt aussagekräftig.

<sup>24</sup> Details zur Berechnung der Anzahl der Instrumentenberechnungen finden sich im Anhang unter: 8.8.2 Numerische Schätzung der Gamma-Matrix, S.191

Instrumentenneuberechnungen an.

Tabelle 6-4: Methodenspezifischer Rechenaufwand der Delta-Gamma-Methode

Rechenprozess	Rechenaufwand <sup>25</sup> (CPU-Zeit)
Instrumentenneuberechnungen	94 Sek. <sup>26</sup>
Delta-Gamma-Approximationen der 10'000 Szenarien	Unter 1 Sek.

### 6.2.4 Methodenspezifischer Rechenaufwand der PCA-Grid-Methode

Bei der PCA-Grid-Methode sind die Instrumentenneuberechnungen abhängig von der Anzahl der Instrumente  $A$ , der Anzahl der zu berücksichtigenden PCA-Faktoren  $k$  sowie der Anzahl der Grid-Punkte  $GP_i$  des  $i$ -ten PCA-Faktors,  $i = 1, \dots, k$ :

$$AIB^{PCA-Grid} = A \cdot \prod_{i=1}^k GP_i \quad (6-5)$$

Auch bei dieser Methode erfordern die Instrumentenberechnungen am meisten Rechenzeit.<sup>27</sup> Die übrigen methodenspezifischen Berechnungen, wie z.B. die Ermittlung der PCA-Faktoren, nehmen im Vergleich dazu kaum Zeit in Anspruch. Selbst die (multi-) linearen Grid-Interpolationen zur Approximation der G/V-Werte der MC-Szenarien sind vergleichsweise rasch durchgeführt. So benötigt der Rechner für 10'000 G/V-Approximationen auf Basis eines 7x5x3-Grid lediglich 0.97 Sekunden CPU-Zeit. Selbst bei einem 6-dimensionalen Grid (7x5x3x3x3x3-Grid) sind die Resultate der MC-Szenarien nach 4.9 Sekunden berechnet (vgl. Tabelle 6-5).

Tabelle 6-5: CPU-Zeiten für lineare Grid-Interpolationen (in Sekunden)

Anzahl Szenarien	Grid-Modell					
	7	7x5	7x5x3	7x5x3x3	7x5x3x3x3	7x5x3x3x3x3
10'000	0.44	0.64	0.97	1.5	2.7	4.9
100'000	4.5	6.4	9.9	15.9	27.1	49.2
1'000'000	45	64	99	159	271	492

<sup>25</sup> VaR-Berechnung des Referenzportfolios

<sup>26</sup> Die in Mathematica programmierte Prozedur zieht bei der Ermittlung der Sensitivitäten jeweils alle im Portfolio enthaltenen Instrumente mit ein.

<sup>27</sup> Vgl. CPU-Zeiten der jeweiligen Rechenprozesse in der Tabelle 6-6

In der Tabelle 6-6 sind die CPU-Zeiten der verschiedenen methodenspezifischen Rechenprozesse für das Referenzportfolio zusammengefasst.

Tabelle 6-6: Methodenspezifischer Rechenaufwand der PCA-Grid-Methode

Rechenprozess	Rechenaufwand <sup>28</sup> (CPU-Zeit)
Ermittlung der PCA-Faktoren (Hauptkomponentenanalyse)	Unter 1 Sek.
Instrumentenneuberechnungen für 7x5x3-Grid	45 Sek.
PCA-Grid-Approximationen der G/V-Werte der 10'000 MC-Szenarien	Unter 1 Sek.

### 6.2.5 Methodenspezifischer Rechenaufwand der PLS-Grid-Methode

Bei der PLS-Methode fallen Instrumentenneuberechnungen sowohl bei der Ermittlung des Pre-Calculation-Datensets als auch bei der Konstruktion des Grids an. Falls bei den  $N^{PC}$  Pre-Calculations Neubewertungen durchgeführt werden, so ergeben sich daraus  $N^{PC} \cdot A$  Instrumentenberechnungen. Falls aber die Pre-Calculations z.B. mit Hilfe der Delta-Gamma-Approximation durchgeführt werden, sind lediglich  $\sum_{i=1}^M A_i \cdot 2i \cdot (1+i)$  Instrumentenberechnungen notwendig. Hinzu kommen schliesslich noch die vom Grid-Modell abhängigen Instrumentenneuberechnungen.<sup>29</sup> Die Anzahl der Instrumentenneuberechnungen beträgt somit je nach Berechnungsweise der Pre-Calculations

$$AIB^{PLS-Grid} = \begin{cases} A \cdot \prod_{i=1}^k GP_i + A \cdot N^{PC} & \text{mit Neuberechnung} \\ A \cdot \prod_{i=1}^k GP_i + \sum_{i=1}^M A_i \cdot 2i \cdot (1+i) & \text{mit Delta-Gamma-Approximation} \end{cases} \quad (6-6)$$

Die übrigen methodenspezifischen Berechnungen, wie z.B. die Extraktion der PLS-Faktoren oder die (multi-) linearen Grid-Interpolationen, sind einmal mehr vernachlässigbar, wie die Resultate der Tabelle 6-7 zeigen.

<sup>28</sup> VaR-Berechnung des Referenzportfolios

<sup>29</sup> Analog zur PCA-Grid-Methode, vgl. Gleichung (6-5)

Tabelle 6-7: Methodenspezifischer Rechenaufwand der PLS-Grid-Methode

<b>Rechenprozess</b>	<b>Rechenaufwand<sup>30</sup> (CPU-Zeit)</b>
Ermittlung der PLS-Faktoren	Unter 1 Sek.
Instrumenteneuberechnungen für 7x5x3-Grid:	
- bei Pre-Calculations mit Neubewertung	256 Sek.
- bei Pre-Calculations mit Delta-Gamma-Approximation	138 Sek.
PLS-Grid-Approximationen der G/V-Werte für 10'000 MC-Szenarien.	Unter 1 Sek.

---

<sup>30</sup> VaR-Berechnung des Referenzportfolios

### 6.3 Instrumentenrechenaufwände im Vergleich

Um die Berechnungsaufwände der Methoden zu verdeutlichen und miteinander in Beziehung zu setzen, werden nun die Instrumentenrechenaufwände für das Referenzportfolio betrachtet.

Das ausgewählte Referenzportfolio besteht aus 500 Instrumenten (250 Caplets und 250 Floorlets),<sup>31</sup> wobei für die kommenden Berechnungen der Einfachheit halber angenommen wird, dass alle Instrumente von sechs Marktfaktoren abhängen<sup>32</sup> und dass bei den MC-Simulationen jeweils 10'000 Szenarien durchgeführt werden.

Unter diesen Voraussetzungen fallen bei der Full-MC-Methode fünf Millionen Instrumentenneuberechnungen an. Die Instrumentenberechnungsaufwände der übrigen Methoden werden nun prozentual zum Rechenaufwand der Full-MC-Methode gemessen.

Tabelle 6-8: Instrumentenrechenaufwand<sup>i)</sup> prozentual zur Full-MC-Methode<sup>ii)</sup>

<b>Delta</b>	0.12%		
<b>Delta-Gamma</b>	0.84%		
<b>PCA-Grid-Methode:</b>			
<b>7x5x3-Grid</b>	1.05%		
<b>7x5x3x3-Grid</b>	3.15%		
<b>7x5x3x3x3-Grid</b>	9.45%		
<b>7x5x3x3x3x3-Grid</b>	28.35%		
<b>7x5x3x3x3x3x3-Grid</b>	85.05%		
<b>PLS-Grid-Methode:</b>	<b>NB 500<sup>iii)</sup></b>	<b>NB 100</b>	<b>DG 100<sup>iv)</sup></b>
<b>5x3x3-Grid</b>	5.45%	1.45%	1.29%
<b>5x3x3x3-Grid</b>	6.35%	2.35%	2.19%
<b>7x5x3-Grid</b>	6.05%	2.05%	1.89%
<b>7x5x3x3-Grid</b>	8.15%	4.15%	3.99%
<b>7x5x3x3x3-Grid</b>	14.45%	10.45%	10.29%

i) Für ein Portfolio mit 500 Instrumenten, welche jeweils von sechs Marktfaktoren abhängen.

ii) Full-MC-Simulation mit 10'000 Szenarien.

iii) 500 Pre-Calculations mit Neubewertung (NB)

iv) 100 Pre-Calculations mit Delta-Gamma-Approximation (DG)

<sup>31</sup> Vgl. 5.4 Short-Caplet/Floorlet-Portfolio, S.140

<sup>32</sup> Der Refinanzierungszinssatz eines Caplets bzw. Floorlets wird anhand linearer Interpolation zweier modellierter Marktfaktoren (Spotrates) gefunden, sofern die Optionslaufzeit nicht gerade der Laufzeit eines Marktfaktors entspricht. Für die Bestimmung der Forwardrate (Underlying des Caplets bzw. des Floorlets) sind nochmals bis zu vier Marktfaktoren notwendig (Eine Forwardrate berechnet sich aufgrund zweier Spotrates, vgl. 8.6 Bestimmung der Forwardrate, S. 188).

Der Vergleich zeigt, dass die Delta-Methode nur gerade 0.12% und die Delta-Gamma-Methode 0.84% des Full-MC-Rechenaufwands benötigt. Bei der PCA-Methode hängt der Rechenaufwand massgeblich von der Modellierung des Grids ab. Bei einem 7x5x3-Grid erfolgt die VaR-Berechnung rund 100-mal schneller als mit der Full-MC-Methode (relativer Rechenaufwand 1.05%). Mit jedem zusätzlichen PCA-Faktor nimmt der Rechenaufwand genau um die Anzahl der Grid-Punkte des neuen Faktors zu.<sup>33</sup> Bei einem Grid mit sieben Faktoren steigt der relative Rechenaufwand auf 85.05%.

Der Aufwand der PLS-Methode hängt jedoch nicht nur von der Grid-Modellierung, sondern auch von der Anzahl und der Berechnungsweise der Pre-Calculations ab.

Werden 500 Pre-Calculations mittels Neuberechnungen durchgeführt, so benötigen sie allein 5% des Full-MC-Aufwands. Der Pre-Calculation-Rechenaufwand kann gesenkt werden, indem die G/V-Werte der Pre-Calculations mit der Delta-, oder der Delta-Gamma-Approximation bestimmt werden. Im ersten Fall sinkt der entsprechende Pre-Calculation-Rechenaufwand auf 0.12% und im zweiten Fall auf 0.84%.

Werden zur Extraktion der PLS-Faktoren 500 Pre-Calculations mit Neubewertungen durchgeführt und wird bei der darauf folgenden MC-Simulation ein 7x5x3-Grid eingesetzt, dann beträgt der relative Rechenaufwand der PLS-Methode 6.05%. Werden nur 100 Pre-Calculations eingesetzt, so sinkt der relative Rechenaufwand auf 2.05%.

### **6.3.1 Rechenaufwand in Abhängigkeit preisrelevanter Faktoren**

In einem nächsten Schritt soll untersucht werden, wie der Rechenaufwand der Methoden reagiert, wenn sich die Anzahl preisrelevanter Marktfaktoren pro Instrument verändert. Bei den Berechnungen wird unterstellt, dass jeweils alle im Portfolio enthaltenen Instrumente von jeweils gleich vielen Marktfaktoren abhängen. Wenn z.B. angenommen wird, dass die Anzahl preisrelevanter Marktfaktoren vier beträgt, so sind alle 500 im Referenzportfolio enthaltenen Instrumente von vier Faktoren abhängig.

---

<sup>33</sup> Im vorliegenden Fall um den Faktor 3

Tabelle 6-9: Rechenaufwand<sup>i)</sup> in Abhängigkeit preisrelevanter Faktoren<sup>ii)</sup>

Methode	Anzahl preisrelevanter Marktfaktoren						
	1	2	3	4	5	6	7
<b>Delta</b>	0.02%	0.04%	0.06%	0.08%	0.10%	0.12%	0.14%
<b>Delta-Gamma</b>	0.04%	0.12%	0.24%	0.40%	0.60%	0.84%	1.12%
<b>Grid-7x5x3<sup>iii)</sup></b>	1.05%	1.05%	1.05%	1.05%	1.05%	1.05%	1.05%

i) Aufwand relativ zur Full-MC-Methode mit 10'000 Szenarien. Das Referenzportfolio enthält 500 Instrumente.

ii) Anzahl Marktfaktoren, die zur Bewertung eines Instruments notwendig sind

iii) PCA-Grid-Methode mit einem 7x5x3-Grid (repräsentativ für die übrigen Grid-Methoden)

Wie die Resultate aus der Tabelle 6-9 zeigen, reagieren nur die Delta- und die Delta-Gamma-Methode auf die Anzahl preisrelevanter Faktoren pro Instrument, da bei diesen Methoden der Rechenaufwand zur numerischen Ermittlung der Sensitivitäten (Deltas/Gammas) zunimmt. Während der relative Rechenaufwand der Delta-Methode linear in Abhängigkeit der Anzahl preisrelevanter Marktfaktoren pro Instrument steigt, nimmt der Rechenaufwand bei der Delta-Gamma-Methode quadratisch zu.

Die Berechnungsaufwände der PCA-Grid- und der PLS-Grid-Methode sind hingegen nicht von der Anzahl preisrelevanter Marktfaktoren betroffen.

### 6.3.2 Rechenaufwand in Abhängigkeit der Anzahl MC-Szenarien

Abschliessend soll untersucht werden, wie die Berechnungsaufwände auf die Anzahl MC-Szenarien reagieren.

Tabelle 6-10: Relativer Rechenaufwand<sup>i)</sup> in Abhängigkeit der Anzahl MC-Szenarien

Methode	Anzahl MC-Szenarien			
	1'000	10'000	100'000	1'000'000
<b>Delta</b>	1.2%	0.12%	0.012%	0.001%
<b>Delta-Gamma</b>	8.4%	0.84%	0.084%	0.008%
<b>PCA-Grid-7x5x3</b>	10.5%	1.05%	0.105%	0.011%
<b>PCA-Grid-7x5x3x3</b>	31.5%	3.15%	0.315%	0.032%
<b>PCA-Grid-7x5x3x3x3x3x3</b>	850.5%	85.05%	8.505%	0.851%
<b>PLS-Grid-7x5x3 (NB500)<sup>ii)</sup></b>	60.5%	6.05%	0.605%	0.061%
<b>PLS-Grid-7x5x3 (NB100)<sup>iii)</sup></b>	20.5%	2.05%	0.205%	0.021%
<b>PLS-Grid-7x5x3 (DG100)<sup>iv)</sup></b>	18.9%	1.89%	0.189%	0.019%

i) Aufwand relativ zur Full-MC-Methode mit entsprechender Anzahl MC-Szenarien

ii) 500 Pre-Calculations mit Neubewertung (NB)

iii) 100 Pre-Calculations mit Neubewertung

iv) 100 Pre-Calculations mit Delta-Gamma-Approximation

Wie Tabelle 6-10 zeigt, verbessert sich der relative Rechenaufwand der Methoden im Vergleich zur Full-MC-Methode um denselben Faktor, um den die Anzahl der Szenarien zunimmt – im vorliegenden Beispiel um den Faktor zehn.

Während sich die Delta- und die Delta-Gamma-Methoden bereits bei einer geringen Anzahl von MC-Szenarien berechnungstechnisch bezahlt machen, lohnt sich der Einsatz der Grid-Methoden erst bei zunehmender Anzahl der Szenarien. Zum Beispiel beträgt der relative Rechenaufwand der PLS-Grid-Methode (7x5x3-Grid; Pre-Calculation mit 500 Neubewertungen) bei nur 1'000 MC-Szenarien 60.5%. Steigt die Zahl der Szenarien aber auf 10'000, sinkt er auf 6.5% und bei 100'000 Szenarien sogar auf 0.65%.

## 6.4 Zusammenfassung

Kapitel 6 beschäftigte sich ausschliesslich mit den Rechenaufwänden der MC-Methoden. Wie die Messergebnisse belegen, sind die Instrumentenbewertungen die wichtigsten Aufwandstreiber. Somit ist die Anzahl notwendiger Instrumentenneuberechnungen ein sehr guter Indikator für die Einschätzung der Rechenaufwände der Methoden.

Die Ergebnisse zeigen, dass alle vorgestellten MC-Methoden um ein Vielfaches schneller sind als die Full-MC-Methode. Die Delta-Methode ist dabei die rechengünstigste Methode, gefolgt von der Delta-Gamma-Methode. Die Aufwände hängen bei der Delta-Methode linear und bei der Delta-Gamma-Methode quadratisch von der Anzahl preisrelevanter Marktfaktoren pro Instrument ab.

Ebenfalls zeigen die Resultate, dass sich der Einsatz von Grid-Methoden erst bei mehr als 1'000 MC-Szenarien bezahlt machen. Der Rechenaufwand der Grid-Methoden hängt dabei primär von der Modellierung des Grids ab. Je mehr Grid-Punkte und Faktoren berücksichtigt werden, desto aufwändiger gestalten sich die Berechnungen. Die PLS-Grid-Methode erfordert zudem für die Zusammenstellung des Pre-Calculatation-Datensets weitere Instrumentenberechnungen, wobei diese mit Hilfe von Delta- und Delta-Gamma-Approximationen gesenkt werden können.

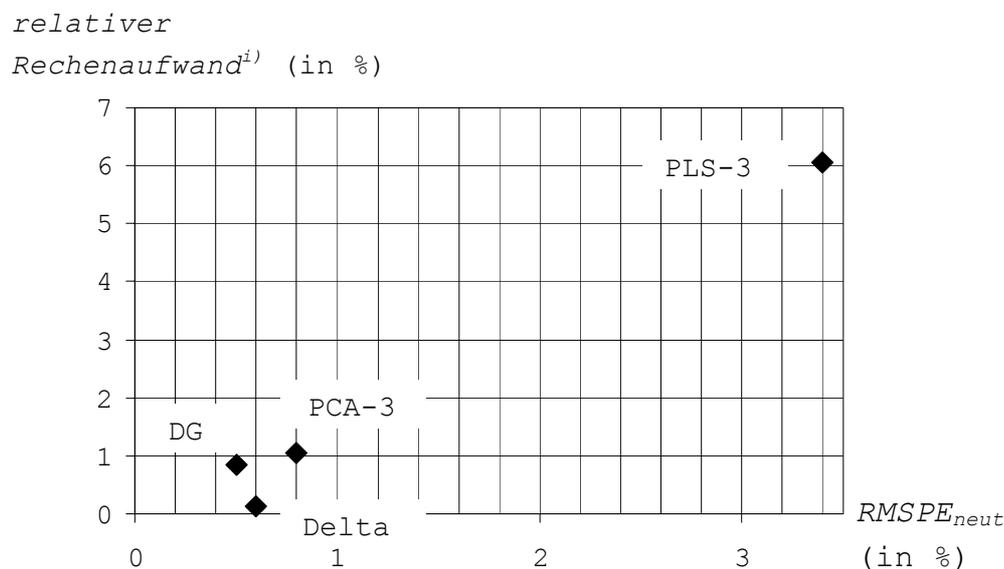
## 7 Zusammenfassung

Im letzten Kapitel dieser Arbeit werden die Resultate aus den Kapiteln 5 und 6 zusammengeführt, um die Genauigkeiten der Methoden den Rechenaufwänden gegenüberzustellen. Zu diesem Zweck wird auf Ebene der Portfoliogruppen der  $RMSPE^1$  mit dem relativen Rechenaufwand der jeweiligen MC-Methoden ins Verhältnis gesetzt. Der relative Rechenaufwand bemisst sich prozentual zum Rechenaufwand der Full-MC-Methode, wobei angenommen wird, dass sämtliche MC-Methoden 10'000 Szenarien einsetzen.<sup>2</sup>

Zwar sind die ermittelten Verhältnisse zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand nur für die zu Grunde liegenden Portfolios gültig. Nichtsdestotrotz liefert die Analyse aufgrund der archetypischen Portfolioauswahl Anhaltspunkte dafür, welche MC-Methoden sich für welche Portfolios eignen und welche nicht. Die Analyse der MC-Methoden erfolgt wieder in Bezug auf das zu Grunde liegende Portfolio, weshalb die Abschnitte in diesem Kapitel wieder nach den Portfoliogruppen gegliedert sind. Im letzten Abschnitt folgt die Schlussfolgerung der Arbeit.

### 7.1 Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Long-Bond-Portfolio

Abbildung 7-1: Genauigkeit versus Rechenaufwand (Eintägiger VaR (99%);LB-Portfolio)



i) Rechenaufwand relativ zur Full-MC-Methode mit 10'000 Szenarien

<sup>1</sup> Vgl. 4.7 Fehlerkennzahlen, S. 116

Enthält ein Portfolio nur Long-Positionen in linearen Instrumenten, wie das LB-Portfolio, so liefern beinahe alle Methoden genaue Resultate. Ausser der PLS-Methode haben die Methoden keine Schwierigkeiten, den *RMSPE* unter einem Prozent zu halten.<sup>3</sup> Der *RMSPE* von rund 3,4% der PLS-Methode ist auf die PLS-Restabweichung<sup>4</sup> zurückzuführen.

Beim *VaR(95%)* ist der *RMSPE* der Delta-Methode nur minimal grösser als bei der Delta-Gamma-Methode, doch dafür benötigt die Delta-Methode sieben Mal weniger Rechenzeit. Beim *VaR(99%)* ist die Delta-Gamma-Methode etwas genauer, da sie die leichte Konvexität der Bondportfolios berücksichtigt.

In Anbetracht des immer noch geringen Rechenaufwands der Delta-Gamma-Methode, sind sowohl die Delta- als auch die Delta-Gamma-Methode für das LB-Portfolio geeignet. Die detaillierten Daten zum Trade-off sind in Tabelle 7-1 enthalten.

Tabelle 7-1: Genauigkeit versus Rechenaufwand beim LB-Portfolio

Methode	relativer Rechenaufwand in %	<i>Eintägiger</i> <i>VaR(95%)</i>	<i>Zweiwöchiger</i> <i>VaR(95%)</i>	<i>Eintägiger</i> <i>VaR(99%)</i>	<i>Zweiwöchiger</i> <i>VaR(99%)</i>
		<i>RMSPE</i> <sub>neut</sub> in %	<i>RMSPE</i> <sub>neut</sub> in %	<i>RMSPE</i> <sub>neut</sub> in %	<i>RMSPE</i> <sub>neut</sub> in %
Delta	0.12	0.5	1.0	0.6	1.3
DG	0.84	0.4	0.4	0.5	0.5
PCA-3	1.05	0.7	0.7	0.8	0.7
PLS-3	6.05	3.3	3.4	3.4	3.4

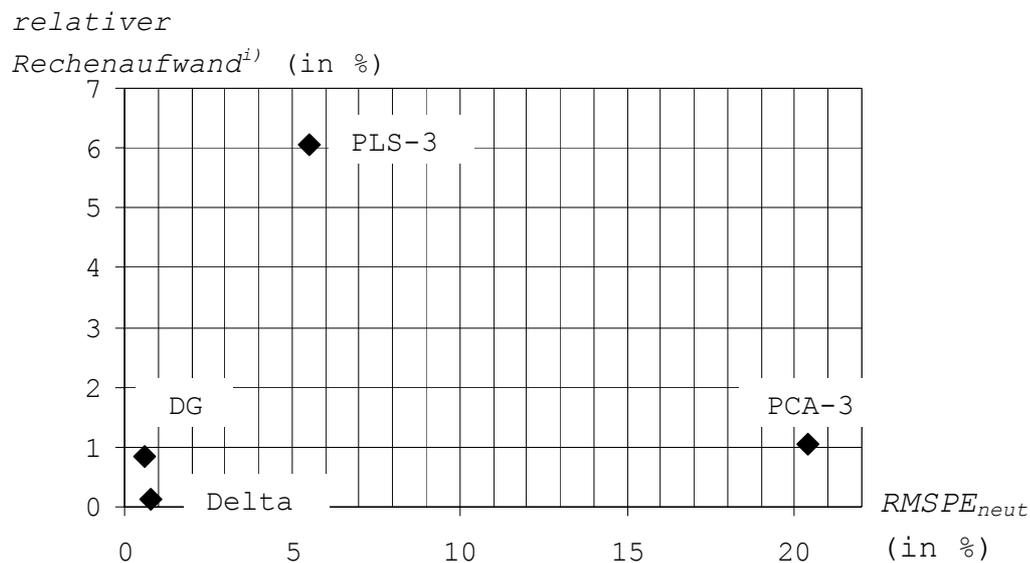
<sup>2</sup> Als vereinfachende Annahme, obwohl bei den Genauigkeitstest der Bondportfolios 100'000 MC-Szenarien angewandt wurden

<sup>3</sup> Einzige Ausnahme bildet die Delta-Methode, deren *RMSPE* bei der Berechnung des zweiwöchigen *VaR(99%)* bei 1.3% liegt.

<sup>4</sup> Vgl. Ausführungen hierzu unter PLS-Grid-Methode, S. 127

## 7.2 Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Long/Short-Bond-Portfolio

Abbildung 7-2: Genauigkeit versus Rechenaufwand (Eintägiger VaR(99%); LSB-Portfolio)



i) Rechenaufwand relativ zur Full-MC-Methode mit 10'000 Szenarien

Enthält das Portfolio sowohl Long- als auch Short-Position in linearen Instrumenten, so wie das SLB-Portfolio, sind ebenfalls die Delta- oder die Delta-Gamma-Methoden anzuwenden, da sie genaue Resultate bei geringem Rechenaufwand produzieren. Erneut liegen die Resultate der beiden Methoden für den  $VaR(95\%)$  nahe beieinander. Beim  $VaR(99\%)$  hat auch hier die Delta-Gamma-Methode aufgrund der leichten Konvexität des Bondportfolios in Bezug auf die Genauigkeit die Nase vorn.

Weit abgeschlagen folgt die PCA-Grid-Methode, die aufgrund der Long/Short-Positionen Mühe hat, die risikorelevanten Marktfaktorbewegungen einzufangen. Sie sollte deshalb nicht auf long/short-bond-ähnliche Portfolios angewandt werden, da sie die Risiken stark unterschätzt.

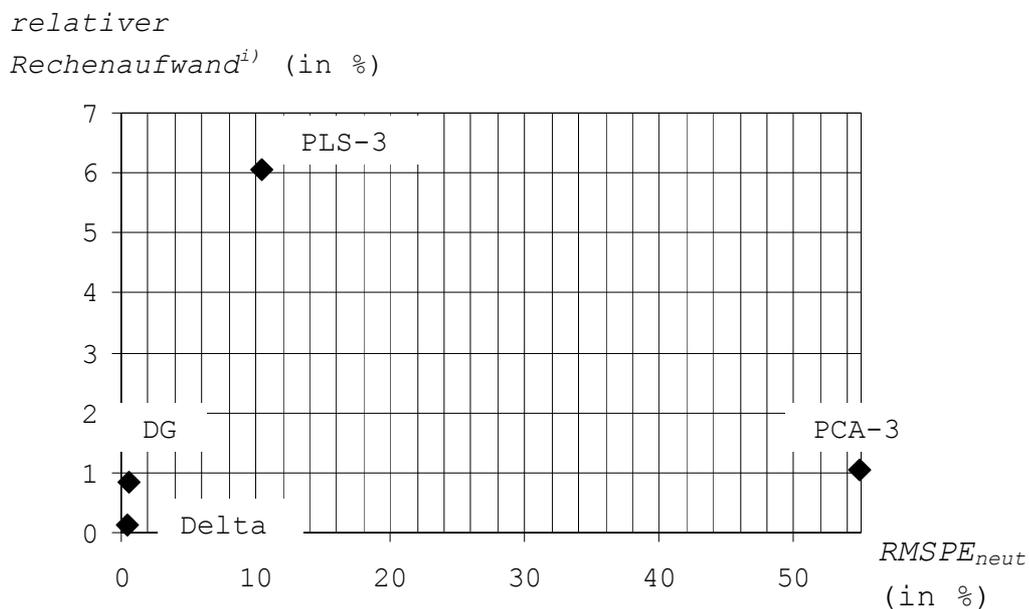
Auch bei der PLS-Grid-Methode ist der Trade-off zwischen Genauigkeit und Rechenaufwand nicht günstig. Zwar sind die Resultate um einiges genauer als die der PCA-Grid-Methode, aber in Anbetracht der guten Resultate der Delta- und der Delta-Gamma-Methode lohnt sich der zusätzliche Rechenaufwand nicht.

Tabelle 7-2: Genauigkeit versus Rechenaufwand beim LSB-Portfolio

Methode	relativer Rechenaufwand in %	Eintägiger VaR(95%)	Zweiwöchiger VaR(95%)	Eintägiger VaR(99%)	Zweiwöchiger VaR(99%)
		$RMSPE_{neut}$ in %	$RMSPE_{neut}$ in %	$RMSPE_{neut}$ in %	$RMSPE_{neut}$ in %
Delta	0.12	0.6	1.3	0.8	1.7
DG	0.84	0.4	0.5	0.6	0.5
PCA-3	1.05	20.3	19.5	20.4	19.5
PLS-3	6.05	5.4	4.6	5.5	4.7

### 7.3 Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Hedged-L/S-Bond-Portfolio

Abbildung 7-3: Genauigkeit versus Rechenaufwand (Eintägiger VaR(99%); HLSB-Portfolio)



i) Rechenaufwand relativ zur Full-MC-Methode mit 10'000 Szenarien

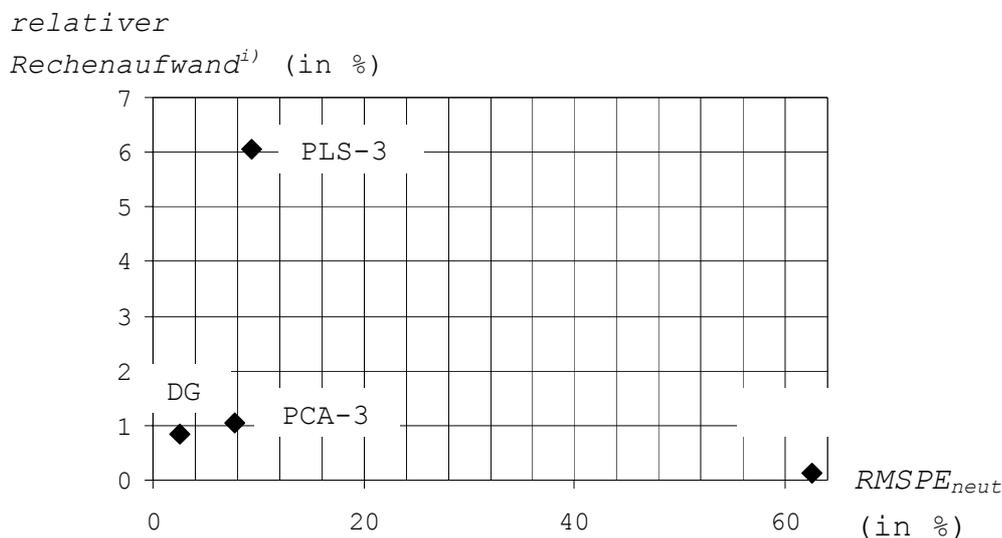
Bei Portfolios mit Long- und Short-Positionen in linearen Instrumenten, die zudem gegen wichtige Marktfaktorbewegungen (hier: parallele Zinsbewegung) abgesichert sind, wie das HLSB-Portfolio, versprechen wiederum die Delta- und die Delta-Gamma den attraktivsten Trade-off. Weder die PLS-Methode und schon gar nicht die PCA-Methode, die enorme Schwierigkeiten hat, den VaR adäquat zu bestimmen, können ein besseres Genauigkeits-Rechenaufwand-Verhältnis vorweisen.

Tabelle 7-3: Genauigkeit versus Rechenaufwand beim HLSB-Portfolio

Methode	relativer Rechenaufwand in %	Eintägiger VaR(95%)	Zweiwöchiger VaR(95%)	Eintägiger VaR(99%)	Zweiwöchiger VaR(99%)
		$RMSPE_{neut}$ in %	$RMSPE_{neut}$ in %	$RMSPE_{neut}$ in %	$RMSPE_{neut}$ in %
Delta	0.12	0.6	0.9	0.5	1.1
DG	0.84	0.5	0.4	0.6	0.5
PCA-3	1.05	54.9	49.9	54.9	49.9
PLS-3	6.05	10.5	10.6	10.5	10.6

## 7.4 Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Short-Caplet/Floorlet-Portfolio

Abbildung 7-4: Genauigkeit versus Rechenaufwand (Eintägiger VaR(99%); SCF-Portfolio)



i) Rechenaufwand relativ zur Full-MC-Methode mit 10'000 Szenarien

Bei Portfolios, die entweder nur Short- oder nur Long-Positionen in konvexen Instrumenten aufweisen, so wie das SCF-Portfolio, stellen sich die Delta-Gamma-, die PLS- sowie die PCA-Grid-Methode als geeignete Methoden heraus. Während beim *eintägigen VaR* die Delta-Gamma- und die PCA-Grid-Methode die verlässlichsten Resultate liefern, sind es beim *zweiwöchigen VaR* die PCA- und die PLS-Grid-Methode.

Den besten Trade-off zur Bestimmung des *eintägigen VaR* bietet die Delta-Gamma-Methode. Beim *zweiwöchigen VaR* ist es eindeutig die PCA-Grid-Methode.

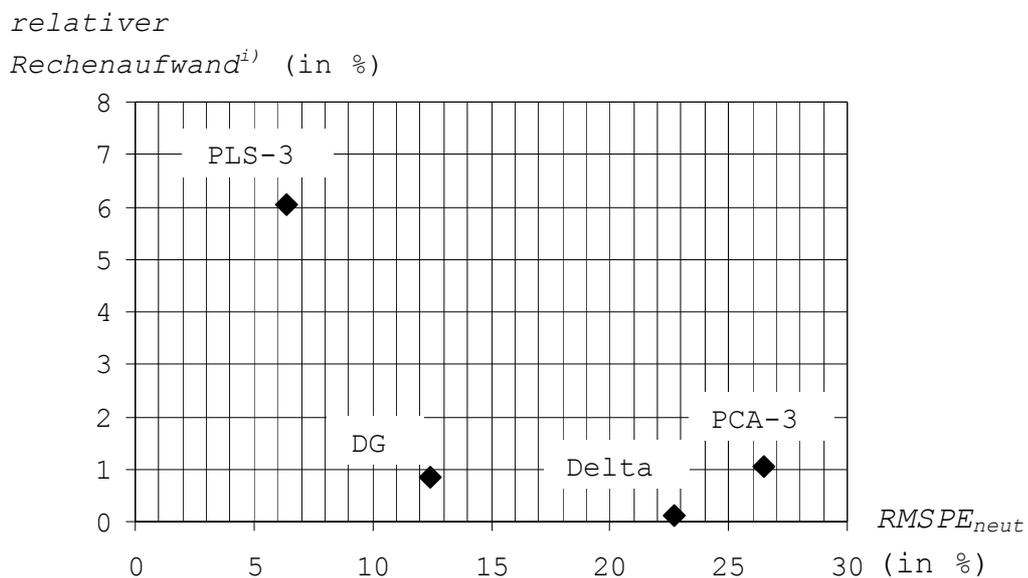
Die Delta-Methode ist bei der Beurteilung der Risiken von konvexen Portfolios überfordert. Der  $RMSPE$  liegt gemäss den Testresultaten in allen Fällen über 50% und in vereinzelten Fällen (*zweiwöchiger VaR*) sogar weit darüber.

Tabelle 7-4: Genauigkeit versus Rechenaufwand beim SCF-Portfolio

Methode	relativer Rechenaufwand in %	Eintägiger VaR(95%)	Zweiwöchiger VaR(95%)	Eintägiger VaR(99%)	Zweiwöchiger VaR(99%)
		$RMSPE_{neut}$ in %	$RMSPE_{neut}$ in %	$RMSPE_{neut}$ in %	$RMSPE_{neut}$ in %
Delta	0.12	58.4	84.4	62.5	86.0
DG	0.84	1.5	14.4	2.5	19.6
PCA-3	1.05	7.3	5.2	7.7	3.8
PLS-3	6.05	9.9	11.6	9.3	9.3

## 7.5 Genauigkeit versus Rechenaufwand beim Digital-Option-Portfolio

Abbildung 7-5: Genauigkeit versus Rechenaufwand (Eintägiger VaR(99%); DO-Portfolio)



i) Rechenaufwand relativ zur Full-MC-Methode mit 10'000 Szenarien

Bei Portfolios, die komplexe Instrumente beinhalten, wie das DO-Portfolio, können nur noch die PLS-Grid-Methode und in beschränktem Masse die Delta-Gamma-Methode akzeptable Resultate liefern. Während beim *eintägigen VaR* die Delta-Gamma-Methode eingesetzt werden kann, sollte beim *zweiwöchigen VaR* trotz des erhöhten Rechenaufwands die PLS-Grid-Methode vorgezogen werden. Zwar benötigt die PLS-Grid-Methode über sieben Mal mehr Rechenzeit als die Delta-Gamma-Methode, doch dafür sind ihre Resultate mehr als doppelt so genau.

Die übrigen beiden Methoden, die Delta- und die PCA-Grid-Methode, sind nicht in der Lage, den VaR des komplexen Portfolios angemessen zu quantifizieren.

Tabelle 7-5: Genauigkeit versus Rechenaufwand für das DO-Portfolio

Methode	relativer Rechenaufwand in %	<i>Eintägiger</i> VaR(95%)	<i>Zweiwöchiger</i> VaR(95%)	<i>Eintägiger</i> VaR(99%)	<i>Zweiwöchiger</i> VaR(99%)
		$RMSPE_{neut}$ in %	$RMSPE_{neut}$ in %	$RMSPE_{neut}$ in %	$RMSPE_{neut}$ in %
Delta	0.12	19.0	52.2	22.7	53.7
DG	0.84	7.6	63.0	12.4	92.6
PCA-3	1.05	26.6	33.8	26.5	32.8
PLS-3	6.05	6.0	14.4	6.4	13.3

## 7.6 Schlussfolgerung

Die vorliegende Arbeit untersuchte ausgewählte Monte-Carlo-basierte VaR-Methoden bzgl. Genauigkeit und Rechenaufwand. Die MC-Methoden unterscheiden sich einzig in der Art und Weise, wie sie die G/V-Funktion des Portfolios in den Berechnungen approximieren. Zwar sind alle vorgestellten Methoden berechnungsgünstiger als die traditionelle Full-MC-Methode, doch die Genauigkeiten ihrer VaR-Messungen sind durch die Approximationstechniken unterschiedlich stark beeinträchtigt.

Die Genauigkeitsanalyse wurde mit Hilfe fünf verschiedener Portfoliogruppen durchgeführt, deren G/V-Charakteristiken archetypische Formen aufwiesen. Während bei linearen und leicht konvexen Portfolios die auf Taylor-Approximationen beruhenden Delta- und Delta-Gamma-Methoden genaue Resultate lieferten, waren bei stark konvexen und komplexen Portfolios die VaR-Berechnungen mit Hilfe Grid-basierter Approximationsmethoden (PCA-Grid- und PLS-Grid-Methode) exakter.

Speziell zu erwähnen ist, dass sich die PCA-Grid-Methode nicht für Bondportfolios eignet, die sowohl bedeutende Long- als auch Short-Positionen aufweisen oder die gegenüber Marktfaktorbewegungen, welche primär durch den ersten PCA-Faktor beschrieben werden, abgesichert sind.

Ebenfalls wurde durch die Untersuchung deutlich, dass sich der Einsatz der PLS-Grid-Methode wegen der resistenten PLS-Restabweichung nur bei komplexen oder stark konvexen Portfolios lohnt.

Tabelle 7-6 beschliesst die Arbeit mit einer groben Zusammenfassung der Ergebnisse.

*Tabelle 7-6: Testergebnisse auf einem Blick*

	LB-Portfolio		LSB-Portfolio		HLSB-Portfolio		SCF-Portfolio		DO-Portfolio	
	1 Tg	10 Tg	1 Tg	10 Tg	1 Tg	10 Tg	1 Tg	10 Tg	1 Tg	10 Tg
VaR(99%)										
Delta	++	++	++	++	++	++	--	--	--	--
DG	++	++	++	++	++	++	++	-	+	--
PCA	+	+	--	--	--	--	+	++	--	-
PLS	-	-	-	-	-	-	+	+	++	++

++ sehr geeignet; + geeignet; - ungeeignet; -- sehr ungeeignet

## ANHANG

### 8 Technischer Anhang

#### 8.1 Caplets und Floorlets

Der Cap (Floor) stellt eine vertragliche Vereinbarung einer Zinsobergrenze (-untergrenze) auf einen fiktiven zu Grunde liegenden Kapitalbetrag (Nominalbetrag), für eine fixierte Laufzeit dar. Die Zinsobergrenze wird als Strike- oder Cap-Rate bezeichnet. Übersteigt (unterschreitet) der vereinbarte Referenzzinssatz die Strike-Rate, so ist der Cap-Verkäufer (Floor-Verkäufer) verpflichtet, die Zinsdifferenz auf Basis des Nominalbetrags an den Käufer zu bezahlen. Somit sichert sich der Käufer eines Caps (Floors) gegen steigende (fallende) Zinsen ab.

Ein Cap (Floor) kann als ein Portfolio mit mehreren Einzeloptionen betrachtet werden, deren Verfall mit den entsprechenden Zinsfestsetzungsterminen zusammenfallen. Die Einzeloption eines Caps nennt man Caplet, die eines Floors Floorlet. Jede Einzeloption kann mit Hilfe einer abgeänderten Form des Black-76-Modells<sup>5</sup> bewertet werden. Kumuliert man die Preise der Einzeloptionen, so erhält man den Marktwert des Caps  $P_{Cap}$ , bzw. des Floors

$P_{Floor}$ :

$$P_{Cap} = \sum_{i=1}^{\text{Anzahl Caplets}} P_{Caplet_i} \quad , \text{ bzw. } \quad P_{Floor} = \sum_{i=1}^{\text{Anzahl Floorlets}} P_{Floorlet_i}$$

Die weiteren Ausführungen beschränken sich auf die Bewertung eines Caplets.<sup>6</sup>

Der Preis eines Caplets  $P_{Caplet}$  beträgt<sup>7</sup>

$$P_{Caplet} = \frac{\exp(-r_{Ref} \cdot t_{Opt})}{1 + t_{Fwd} \cdot Forward} \cdot t_{Fwd} \cdot Nominal \cdot (Forward \cdot \Phi(d_1) - Strike \cdot \Phi(d_2)) \quad (8-1)$$

wobei  $\Phi(\cdot)$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet und

<sup>5</sup> Vgl. Black (1976)

<sup>6</sup> Für die Bewertung von Floorlets siehe Haug (1998), S. 144 f.; Hull (1993), S. 375 ff.; Biermann (1999), S. 166 ff.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{\text{Forward}}{\text{Strike}}\right) + \left(\frac{\sigma_{Fwd}^2}{2}\right) \cdot t_{Opt}}{\sigma_{Fwd} \cdot \sqrt{t_{Opt}}} \quad \text{bzw.} \quad d_2 = d_1 - \sigma_{Fwd} \cdot \sqrt{t_{Opt}}$$

Tabelle 8-1: Legende zu Caplet-Bewertungsformel

<i>Nominal</i>	zu Grunde liegender Kapitalbetrag (Nominalbetrag)
<i>Forward</i>	Forwardsatz (Underlying)
<i>Strike</i>	Strike-Rate
$\sigma_{Fwd}$	Volatilität des Forwardsatzes (annualisiert)
$t_{Opt}$	Laufzeit der Option
$r_{Ref}$	Refinanzierungszinssatz
$t_{Fwd}$	Länge der Forward-Periode in Jahren <sup>8</sup>

## 8.2 Zahlenmaterial für das Anwendungsbeispiel: Short-Caplet-Portfolio

Die Detailspezifikationen des Short-Caplet-Portfolios sind in der Tabelle 8-2 enthalten.

Tabelle 8-2: Detailspezifikationen des Short-Caplet-Portfolios

<i>Nominal</i>	1 Mio. GE
<i>Forward</i>	8.0%
<i>Strike-Rate</i>	7.9%
$\sigma_{Fwd}$ <sup>9</sup>	47.43%
$t_{Opt}$	2/360
$r_{Ref}$	7.8%
$t_{Fwd}$	180/360

<sup>7</sup> Vgl. Haug (1998), S. 144

<sup>8</sup> bei einer Zinsanzahl 30/360

<sup>9</sup> Die relative annualisierte Volatilität der Forwardrate,  $\sigma_{Fwd}$  (die zur Berechnung des Optionspreises verwendet wird), bestimmt sich aus der täglichen absoluten Volatilität der Forwardrate  $\sigma$  mittels:

$$\sigma_{Fwd} = \frac{\sigma}{\text{Forward}} \cdot \sqrt{360} = \frac{0.2\%}{8.0\%} \cdot \sqrt{360} = 2.5\% \cdot \sqrt{360} = 47.43\%$$

Geplanter Preis des Caplets

$$\begin{aligned}
 P_{Caplet}^{Plan} &= \frac{\exp(-r_{Ref} \cdot t_{Opt})}{1 + t_{Fwd} \cdot Forward} \cdot t_{Fwd} \cdot Nominal \cdot (Forward \cdot \Phi(d_1) - Strike \cdot \Phi(d_2)) \\
 &= \frac{\exp\left(-0.078 \cdot \frac{2}{360}\right)}{1 + \frac{180}{360} \cdot 0.08} \cdot \frac{180}{360} \cdot 1'000'000 \cdot (0.08 \cdot 0.645597 - 0.079 \cdot 0.632358) \\
 &= 812.85,
 \end{aligned}$$

wobei die Berechnung von  $d_1$  und  $d_2$  folgende Resultate lieferte

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{Forward}{Strike}\right) + \left(\frac{\sigma_{Fwd}^2}{2}\right) \cdot t_{Opt}}{\sigma_{Fwd} \cdot \sqrt{t_{Opt}}} = \frac{\ln\left(\frac{0.08}{0.079}\right) + \left(\frac{0.4743^2}{2}\right) \cdot \frac{2}{360}}{0.4743 \cdot \sqrt{\frac{2}{360}}} = 0.373459$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_{Fwd} \cdot \sqrt{t_{Opt}} = 0.373459 - 0.4743 \cdot \sqrt{\frac{2}{360}} = 0.338103$$

### 8.2.1 Delta des Short-Caplet-Portfolios

Das Delta des Short-Caplet-Portfolios beträgt:

$$\delta = \frac{\partial P(X)}{\partial X} \Big|_{\bar{X}} = - \frac{\partial P_{Caplet}}{\partial Forward} \Big|_{E(Forward)} = -\delta_{Caplet} \approx -310'249,$$

wobei<sup>10</sup>

$$\delta^{Caplet} = \frac{\partial P_{Caplet}}{\partial Forward} = \frac{\exp(-r_{Ref} \cdot t_{Opt})}{1 + t_{Fwd} \cdot Forward} \cdot t_{Fwd} \cdot Nominal \cdot \Phi(d_1). \quad (8-2)$$

<sup>10</sup> Vgl. Biermann, (1999), S. 167

### 8.2.2 Gamma des Short-Caplet-Portfolios

Das Gamma des Short-Caplet-Portfolios beträgt

$$\gamma = \left. \frac{\partial^2 P(X)}{\partial X^2} \right|_{\bar{X}} = - \left. \frac{\partial^2 P_{\text{Caplet}}}{\partial (\text{Forward})^2} \right|_{E(\text{Forward})} \approx -6.3216 \cdot 10^7.$$

Für das Gamma eines Caplets gilt<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} \gamma^{\text{Caplet}} &= \frac{\partial^2 P_{\text{Caplet}}}{\partial (\text{Forward})^2} \\ &= \frac{\exp(-r_{\text{Ref}} \cdot t_{\text{Opt}})}{1 + t_{\text{Fwd}} \cdot \text{Forward}} \cdot t_{\text{Fwd}} \cdot \text{Nominal} \cdot \varphi(d_1) \cdot \frac{1}{\text{Forward} \cdot \sigma_{\text{Fwd}} \cdot \sqrt{t_{\text{Opt}}}} \end{aligned} \quad (8-3)$$

wobei  $\varphi(\cdot)$  die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

### 8.3 Eigenwertproblem

Das Eigenwertproblem der Korrelationsmatrix  $\underline{\mathfrak{R}}$  lautet<sup>12</sup>

$$(\underline{\mathfrak{R}} - \hat{\lambda} \cdot \underline{\mathbf{I}}) \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad (8-4)$$

wobei  $\hat{\lambda}$  den Eigenwert und der  $(M \times 1)$ -Vektor  $\hat{\mathbf{u}}$  den entsprechenden Eigenvektor bezeichnet. Die Gleichung (8-4) hat genau dann nichttriviale Lösungen  $\hat{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}$ , wenn

$$\det(\underline{\mathfrak{R}} - \hat{\lambda} \cdot \underline{\mathbf{I}}) = 0. \quad (8-5)$$

Die obige Eigenwertbedingung entspricht der so genannten Charakteristischen Gleichung, deren Lösung im Falle einer reellen symmetrischen Matrix zu  $M$  reellen Eigenwerten führt

$$\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \dots \geq \hat{\lambda}_M. \quad (8-6)$$

<sup>11</sup> Vgl. Biermann (1999), S. 167

<sup>12</sup> Vgl. Bronstein et.al (1999), S. 278; Mathai/Provost (1992), S. 8

Zu jedem Eigenwert  $\hat{\lambda}_i, i = 1, \dots, M$  kann ein normierter  $(M \times 1)$ -Eigenvektor  $\hat{\mathbf{u}}_{\bullet, i}$  gefunden werden. Es gilt also

$$\|\hat{\mathbf{u}}_{\bullet, i}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^M \hat{u}_{k, i}^2} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, M. \quad (8-7)$$

Eine Besonderheit der Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix ist, dass sie orthogonal zueinander stehen<sup>13</sup>

$$\hat{\mathbf{u}}_{\bullet, i}^T \cdot \hat{\mathbf{u}}_{\bullet, j} = 0, \quad i \neq j \wedge i, j = 1, \dots, M. \quad (8-8)$$

Werden die normierten Eigenvektoren in der  $(M \times M)$ -Matrix  $\underline{\hat{\mathbf{U}}}$  zusammengefasst, so dass in der  $i$ -ten Spalte der  $i$ -te normierte Eigenvektor steht,

$$\underline{\hat{\mathbf{U}}} = (\hat{\mathbf{u}}_{\bullet, 1}, \dots, \hat{\mathbf{u}}_{\bullet, M}) = \begin{pmatrix} \hat{u}_{1,1} & \cdots & \hat{u}_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{u}_{M,1} & \cdots & \hat{u}_{M,M} \end{pmatrix} \quad (8-9)$$

so folgt gemäss den Gleichungen (8-7) und (8-8)

$$\underline{\hat{\mathbf{U}}} \cdot \underline{\hat{\mathbf{U}}}^T = \underline{\hat{\mathbf{U}}}^T \cdot \underline{\hat{\mathbf{U}}} = \underline{\mathbf{I}}. \quad (8-10)$$

### 8.3.1 Beweis der Risikovektor-Abbildung durch PCA-Faktoren

In Gleichung (3-27) wird behauptet, dass  $\hat{\mathbf{S}} = \underline{\hat{\mathbf{U}}} \cdot \sqrt{\underline{\hat{\mathbf{\Lambda}}}} \cdot \hat{\mathbf{H}}$ . Dieser Zusammenhang soll im Folgenden bewiesen werden.

Zur Erinnerung:  $\hat{\mathbf{S}}$  bezeichnet den standardisierten Risikovektor. Für die Verteilung gilt  $\hat{\mathbf{S}} \sim N_M(\mathbf{0}, \underline{\mathfrak{R}})$ . In der  $(M \times M)$ -Diagonalmatrix  $\underline{\hat{\mathbf{\Lambda}}}$  sind die reellen Eigenwerte der Korrelationsmatrix  $\underline{\mathfrak{R}}$  der Grösse nach in der Hauptdiagonalen angeordnet und die  $(M \times M)$ -

<sup>13</sup> Vgl. Bronstein et al., S. 279

Matrix  $\underline{\hat{\mathbf{U}}}$  enthält die entsprechenden normierten Eigenvektoren.  $\hat{\mathbf{H}}$  ist der  $(M \times 1)$ -Vektor der PCA-Faktoren. Es gilt  $\hat{\mathbf{H}} \sim N_M(\mathbf{0}, \underline{\mathbf{I}})$ .

Für den Beweis wird zunächst festgehalten, dass eine Linearkombination unabhängiger normalverteilter Variablen wiederum normalverteilt ist.<sup>14</sup> Somit muss lediglich überprüft werden, ob die Normalverteilungsparameter von  $\underline{\hat{\mathbf{U}}} \cdot \sqrt{\underline{\hat{\Lambda}}} \cdot \hat{\mathbf{H}}$  mit denen von  $\hat{\mathbf{S}}$  übereinstimmen. Der erste Parameter, der Erwartungsvektor, ist in beiden Fällen identisch

$$E(\underline{\hat{\mathbf{U}}} \cdot \sqrt{\underline{\hat{\Lambda}}} \cdot \hat{\mathbf{H}}) = \underline{\hat{\mathbf{U}}} \cdot \sqrt{\underline{\hat{\Lambda}}} \cdot \underbrace{E(\hat{\mathbf{H}})}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{0} = E(\hat{\mathbf{S}}).$$

Für die Kovarianzmatrix der Linearkombination der PCA-Faktoren gilt

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\underline{\hat{\mathbf{U}}} \cdot \sqrt{\underline{\hat{\Lambda}}} \cdot \hat{\mathbf{H}}) &= \underline{\hat{\mathbf{U}}} \cdot \sqrt{\underline{\hat{\Lambda}}} \cdot \text{Cov}(\hat{\mathbf{H}}) \cdot (\sqrt{\underline{\hat{\Lambda}}})^T \cdot \underline{\hat{\mathbf{U}}}^T \\ &= \underline{\hat{\mathbf{U}}} \cdot \sqrt{\underline{\hat{\Lambda}}} \cdot \underline{\mathbf{I}} \cdot \sqrt{\underline{\hat{\Lambda}}} \cdot \underline{\hat{\mathbf{U}}}^T \\ &= \underline{\hat{\mathbf{U}}} \cdot \underline{\hat{\Lambda}} \cdot \underline{\hat{\mathbf{U}}}^T. \end{aligned}$$

Da aber  $\underline{\hat{\Lambda}}$  die Diagonalmatrix der Eigenwerte und  $\underline{\hat{\mathbf{U}}}$  die Matrix der entsprechenden Eigenvektoren der Korrelationsmatrix  $\underline{\mathfrak{R}}$  darstellt, kann der Satz der Hauptachsentransformation angewandt werden<sup>15</sup>

$$\underline{\hat{\mathbf{U}}} \cdot \underline{\hat{\Lambda}} \cdot \underline{\hat{\mathbf{U}}}^T = \underline{\mathfrak{R}}, \quad (8-11)$$

der beweist, dass

$$\text{Cov}(\underline{\hat{\mathbf{U}}} \cdot \sqrt{\underline{\hat{\Lambda}}} \cdot \hat{\mathbf{H}}) = \underline{\mathfrak{R}} = \text{Cov}(\hat{\mathbf{S}}). \quad (8-12)$$

<sup>14</sup> Additionstheorem der Normalverteilung. Vgl. Bosch (1998), S. 268

<sup>15</sup> Vgl. Bronstein et al. (1999), S. 279; Fahrmeir/Hamerle (1984), S. 597; Mathai/Provost (1992), S. 8

### 8.4 Ermittlung der unterjährigen annualisierten stetigen Spotrates

Um aus einem diskreten LIBOR-Satz  $r_{LIBOR}(1/m)$  mit einer Laufzeit von  $1/m$ -Jahren die äquivalente annualisierte stetige Spotrate<sup>16</sup>  $r_{stetig}(1/m)$  zu erhalten, verwendet man die Umformung<sup>17</sup>

$$r_{stetig}(1/m) = m \cdot \ln \left( 1 + \frac{r_{LIBOR}(1/m)}{m} \right). \quad (8-13)$$

### 8.5 Ermittlung der überjährigen annualisierten stetigen Spotrates

Die annualisierten stetigen Spotrates für den überjährigen Zinsbereich können rekursiv mit Hilfe der Bootstrap-Methode<sup>18</sup> aus den Swapsätzen hergeleitet werden<sup>19</sup>

$$r_{stetig}(i) = \frac{1}{i} \cdot \ln \left( \frac{1 + r_{Swap}(i)}{1 - r_{Swap}(i) \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \exp(-r_{stetig}(j) \cdot j)} \right). \quad (8-14)$$

Dabei ist  $r_{Swap}(i)$  der  $i$ -jährige Swapsatz, wobei  $i = 1, 2, 3, \dots$  und  $r_{stetig}(i)$  die entsprechende annualisierte stetige  $i$ -jährige Spotrate.

Falls für bestimmte Laufzeiten keine Swapsätze vorhanden sind, können diese z.B. durch einfache lineare Interpolation geschätzt werden. Angenommen, es fehlen die 6-, 8- und 9-jährigen Swapsätze, so gilt<sup>20</sup>

$$r_{Swap}(6) = \frac{r_{Swap}(5) + r_{Swap}(7)}{2}, \quad r_{Swap}(8) = \frac{2 \cdot r_{Swap}(7) + r_{Swap}(10)}{3}, \quad r_{Swap}(9) = \frac{r_{Swap}(7) + 2 \cdot r_{Swap}(10)}{3}$$

<sup>16</sup> Zinszahlungen finden kontinuierlich statt.

<sup>17</sup> Vgl. Haug (1998), S. 181; Bühler/Zimmermann (1996) S. 56; Hull (1993), S. 48

<sup>18</sup> Erstmals eingesetzt von Caks (1977)

<sup>19</sup> Vgl. Haug (1998), S. 183; Bühler/Zimmermann (1996), S. 56

<sup>20</sup> Vgl. Staub (1997), S. 55. Alternativ kann anstelle der linearen Interpolation auf der Ebene der Swap-Sätze auch auf der Ebene der entsprechenden Diskontfaktoren interpoliert werden, wie das z.B. Bühler (1995), S. 96, vorschlägt.

## 8.6 Bestimmung der Forwardrate

Bei stetig verzinsten Zinssätzen gilt für die stetige Forwardrate für den Zeitraum  $[t, T]$ :<sup>21</sup>

$$\text{Forwardrate}(t, T) = \frac{r_{\text{stetig}}(T) \cdot T - r_{\text{stetig}}(t) \cdot t}{T - t} \quad (8-15)$$

## 8.7 Zahlenmaterial für das Anwendungsbeispiel: Steepness-Bondportfolio

Für das Zahlenbeispiel werden die Daten der USD-Zinskurve vom 1. Januar 1992 zu Grunde gelegt. Die Zinsdaten sind dem Zinskurvenset "Bondportfolio" entnommen.<sup>22</sup>

Tabelle 8-3: Daten der USD-Zinskurve (1. Januar 1992)

Laufzeit	1M	3M	6M	1J	2J	3J	4J	5J	7J	10J
Zins (in %)	4.30	4.23	4.19	4.22	4.83	5.47	5.98	6.44	6.95	7.34
Volatilität <sup>23</sup> (in Bp)	6.5	4.5	4.4	4.3	4.1	4.0	4.0	4.2	4.1	4.5

M: Monat; J: Jahr

Abbildung 8-1: Die Korrelationsmatrix der USD-Zinskurve

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} 1. & 0.700948 & 0.693433 & 0.60052 & 0.20083 & 0.176603 & 0.156772 & 0.143666 & 0.170338 & 0.138294 \\ 0.700948 & 1. & 0.87594 & 0.804341 & 0.310757 & 0.274856 & 0.240235 & 0.207935 & 0.224583 & 0.186148 \\ 0.693433 & 0.87594 & 1. & 0.877568 & 0.318997 & 0.289902 & 0.264916 & 0.249791 & 0.271414 & 0.208654 \\ 0.60052 & 0.804341 & 0.877568 & 1. & 0.36517 & 0.342385 & 0.316908 & 0.288735 & 0.323036 & 0.270406 \\ 0.20083 & 0.310757 & 0.318997 & 0.36517 & 1. & 0.977595 & 0.922244 & 0.859905 & 0.790232 & 0.694625 \\ 0.176603 & 0.274856 & 0.289902 & 0.342385 & 0.977595 & 1. & 0.94604 & 0.876014 & 0.805276 & 0.710682 \\ 0.156772 & 0.240235 & 0.264916 & 0.316908 & 0.922244 & 0.94604 & 1. & 0.911274 & 0.853699 & 0.753801 \\ 0.143666 & 0.207935 & 0.249791 & 0.288735 & 0.859905 & 0.876014 & 0.911274 & 1. & 0.905587 & 0.815819 \\ 0.170338 & 0.224583 & 0.271414 & 0.323036 & 0.790232 & 0.805276 & 0.853699 & 0.905587 & 1. & 0.892925 \\ 0.138294 & 0.186148 & 0.208654 & 0.270406 & 0.694625 & 0.710682 & 0.753801 & 0.815819 & 0.892925 & 1. \end{pmatrix}$$

Für die Korrelationsmatrix in Abbildung 8-1 werden die Eigenwerte (vgl. Tabelle 8-4) sowie die normierten Eigenvektoren (Tabelle 8-5) mittels Lösung des Eigenwertproblems berechnet.<sup>24</sup>

<sup>21</sup> Vgl. Hull (1993), S. 81-83

<sup>22</sup> Vgl. 4.3.1 Zinskurvenset "Bondportfolio", S. 108

<sup>23</sup> Tägliche Volatilität der Spotrates. Die Volatilitätsschätzung erfolgt gemäss den Erläuterungen unter Abschnitt: 4.3.1 Zinskurvenset "Bondportfolio", S. 108.

<sup>24</sup> Vgl. 8.3 Eigenwertproblem, S. 184

Tabelle 8-4: Eigenwerte der Korrelationsmatrix der USD-Zinskurve

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$	$\lambda_8$	$\lambda_9$	$\lambda_{10}$
5.8415	2.7087	0.4788	0.4219	0.1765	0.1335	0.0897	0.0681	0.0627	0.0187

Tabelle 8-5: Normierte Eigenvektoren der Korrelationsmatrix der USD-Zinskurve

$\hat{u}_{\bullet,1}$	$\hat{u}_{\bullet,2}$	$\hat{u}_{\bullet,3}$	$\hat{u}_{\bullet,4}$	$\hat{u}_{\bullet,5}$	$\hat{u}_{\bullet,6}$	$\hat{u}_{\bullet,7}$	$\hat{u}_{\bullet,8}$	$\hat{u}_{\bullet,9}$	$\hat{u}_{\bullet,10}$
0.1697	0.4334	0.313	-.7959	-.2153	0.0588	-.0449	0.0115	0.0070	0.0016
0.2169	0.4723	-.0818	0.0855	0.7639	0.0130	-.3616	-.0259	0.0002	-.0268
0.2300	0.4717	-.0487	0.2278	-.0332	-.3485	0.7358	0.0057	-.0802	-.0019
0.2439	0.4224	-.0838	0.4471	-.5733	0.2708	-.3836	0.0573	0.0499	0.0099
0.3766	-.1390	-.4028	-.1526	0.0483	0.2859	0.1754	-.1195	0.3969	0.6056
0.3769	-.1629	-.3801	-.1481	-.0048	0.2302	0.1229	-.0520	0.0775	-.7669
0.3772	-.1869	-.2159	-.0991	-.0537	-.1184	-.1305	0.0635	-.8279	0.2071
0.3720	-.2024	0.0698	-.0096	-.0491	-.5808	-.2216	0.5469	0.3569	-.0175
0.3673	-.1788	0.3775	0.1196	-.0483	-.2669	-.1252	-.7603	0.0899	-.0310
0.3352	-.1858	0.6206	0.1950	0.1738	0.4942	0.2258	0.3126	-.0809	0.0130

Aus den Eigenwerten und den normierten Eigenvektoren lässt sich gemäss Gleichung (3–39) auf S. 64 die gewünschte PCA-Ladungsmatrix berechnen. Im vorliegenden Fall wird die Ladungsmatrix für die ersten drei PCA-Faktoren berechnet  $\hat{\underline{\beta}}^{PCA(3)} = (\hat{\beta}_{\bullet,1}, \hat{\beta}_{\bullet,2}, \hat{\beta}_{\bullet,3})$ . Die Resultate sind in der Tabelle 8-6 aufgeführt.

Zum Vergleich wird ausserdem die PLS-Ladungsmatrix mit Hilfe der PLS-Methode bestimmt. Zur Extraktion der PLS-Faktoren dient ein Datenset mit 100 Pre-Calculations. Die Werte der Ladungsmatrix  $\hat{\underline{\beta}}^{PLS(3)} = (\hat{\beta}_{\bullet,1}, \hat{\beta}_{\bullet,2}, \hat{\beta}_{\bullet,3})$  sind in der Tabelle 8-7 aufgeführt.

Tabelle 8-6: Werte der PCA-Ladungsmatrix

$\hat{\beta}_{\bullet,1}$	$\hat{\beta}_{\bullet,2}$	$\hat{\beta}_{\bullet,3}$
0.0267%	0.0464%	0.0141%
0.0236%	0.0350%	-0.0025%
0.0245%	0.0342%	-0.0015%
0.0253%	0.0299%	-0.0025%
0.0373%	-0.0094%	-0.0114%
0.0036%	-0.0011%	-0.0011%
0.0036%	-0.0012%	-0.0006%
0.0378%	-0.0140%	0.0020%
0.0364%	-0.0121%	0.0107%
0.0365%	-0.0138%	0.0193%

Tabelle 8-7: Werte der PLS-Ladungsmatrix

$\beta_{\bullet,1}$	$\beta_{\bullet,2}$	$\beta_{\bullet,3}$
0.0295%	0.0497%	0.0161%
0.0184%	0.0359%	-0.0137%
0.0175%	0.0357%	-0.0160%
0.0123%	0.0333%	-0.0178%
-0.0257%	0.0300%	0.0033%
-0.0266%	0.0286%	0.0036%
-0.0276%	0.0273%	0.0015%
-0.0298%	0.0267%	-0.0031%
-0.0284%	0.0253%	-0.0087%
-0.0302%	0.0228%	-0.0137%

## 8.8 Neuberechnungen zur numerischen Schätzung der Sensitivitäten

Die Anzahl notwendiger Instrumentenneuberechnungen zur numerischen Schätzung der Sensitivitäten wird jeweils zunächst anhand eines Instruments, dessen Preis  $P_{Inst}(X_1, X_2)$  von zwei Marktfaktoren  $X_1$  und  $X_2$  abhängt, hergeleitet. Danach werden die Resultate verallgemeinert, indem der Rechenaufwand für Instrumente, die von  $n$ ,  $n = 1, \dots, M$  Marktfaktoren abhängen, hergeleitet wird.

### 8.8.1 Numerische Schätzung des Delta-Vektors

Ein von zwei Marktfaktoren abhängiges Instrument besitzt einen  $(2 \times 1)$ -Delta-Vektor

$$\delta^{Inst} = \begin{pmatrix} \delta_1^{Inst} \\ \delta_2^{Inst} \end{pmatrix}. \quad (8-16)$$

Zur numerischen Schätzung des Instrumenten-Deltas  $\delta_1^{Inst}$  sind zwei Instrumentenneuberechnungen notwendig<sup>25</sup>

$$\delta_1^{Instr} = \left. \frac{\partial P_{Inst}(X_1, X_2)}{\partial X_1} \right|_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2)} \approx \frac{P_{Inst}(\bar{X}_1 + h, \bar{X}_2) - P_{Inst}(\bar{X}_1 - h, \bar{X}_2)}{2 \cdot h}, \quad (8-17)$$

wobei  $h$  für eine beliebig kleine reelle Zahl steht. Zur numerischen Schätzung von  $\delta_2^{Inst}$  sind nochmals zwei Instrumentenberechnungen nötig.

<sup>25</sup> Pritsker (1996), S. 23

Allgemein gilt, dass für ein Instrument, das von  $n$  Marktfaktoren abhängt,  $2n$  Instrumentenneuberechnungen durchgeführt werden müssen, um den Instrumenten-Delta-Vektor zu ermitteln.

### 8.8.2 Numerische Schätzung der Gamma-Matrix

Zur numerischen Bestimmung des Instrumenten-Gammas  $\gamma_{1,1}^{Inst}$ , der zweifachen partiellen Ableitung gegenüber dem ersten Marktfaktor  $X_1$ , sind wiederum zwei Instrumentenneuberechnungen notwendig<sup>26</sup>

$$\begin{aligned} \gamma_{1,1}^{Inst} &= \left. \frac{\partial^2 P_{Inst}(X_1, X_2)}{\partial X_1^2} \right|_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2)} \\ &\approx \frac{P_{Inst}(\bar{X}_1 + h, \bar{X}_2) + P_{Inst}(\bar{X}_1 - h, \bar{X}_2) - 2 \cdot P_{Inst}(\bar{X}_1, \bar{X}_2)}{h^2} \end{aligned} \quad (8-18)$$

Gleiches gilt für die Ermittlung von  $\gamma_{2,2}^{Inst}$ .

Demgegenüber erfordert die Bestimmung des Kreuz-Gammas des Instruments  $\gamma_{1,2}^{Inst}$ , wobei gelten soll, dass  $\gamma_{2,1}^{Inst} = \gamma_{1,2}^{Inst}$ ,<sup>27</sup> vier Instrumentenneuberechnungen

$$\begin{aligned} \gamma_{1,2}^{Inst} &= \left. \frac{\partial P_{Inst}(X_1, X_2)}{\partial X_1 \cdot \partial X_2} \right|_{(\bar{X}_1, \bar{X}_2)} \\ &\approx \frac{1}{4h^2} \left\{ \begin{aligned} &P_{Inst}(\bar{X}_1 + h, \bar{X}_2 + h) + P_{Inst}(\bar{X}_1 - h, \bar{X}_2 - h) \\ &- P_{Inst}(\bar{X}_1 - h, \bar{X}_2 + h) - P_{Inst}(\bar{X}_1 + h, \bar{X}_2 - h) \end{aligned} \right\} . \end{aligned} \quad (8-19)$$

<sup>26</sup> Unter der Annahme, dass der erwartete Preis des Instruments  $P_{Inst}(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$  im voraus bekannt ist.

<sup>27</sup> Man erhält so eine symmetrische Gamma-Matrix.

Verallgemeinert bedeutet dies, dass ein Instrument, welches von  $n$  Marktfaktoren abhängt

- $2n$  Instrumentenneuberechnungen für die Diagonalelemente  $\{\gamma_{i,i}^{Inst} \mid i = 1, \dots, n\}$  der Gamma-Matrix und
- $2n^2 - 2n$  Berechnungen<sup>28</sup> für die Kreuz-Gammas  $\{\gamma_{i,j}^{Inst} \mid i, j = 1, \dots, n \wedge i \neq j\}$  erfordert.

Zur numerischen Schätzung der Gamma-Matrix eines von  $n$  Marktfaktoren abhängigen Instruments müssen  $2n^2$  Instrumentenberechnungen durchgeführt werden.

### 8.8.3 Beispiel: Instrumentenneuberechnungen für Portfoliosensitivitäten

Die notwendige Anzahl Instrumentenneuberechnungen zur Schätzung der Portfoliosensitivitäten soll anhand eines einfachen Beispiels aufgezeigt werden.

Betrachtet wird ein Portfolio, das aus drei Instrumenten besteht. Die Preisfunktion  $P_A(X_1)$  des ersten Instruments A ist von einem Marktfaktor abhängig, die Preisfunktion  $P_B(X_1, X_2)$  des Instruments B von zwei und die Preisfunktion  $P_C(X_1, X_2, X_3)$  des Instruments C von drei Marktfaktoren. Die Bewertungsfunktion des Portfolios lautet

$$P_{Portfolio}(X_1, X_2, X_3) = P_A + P_B + P_C. \quad (8-20)$$

Um den Delta-Vektor des Portfolios

$$\delta^{Portfolio} = \left( \frac{\partial P_{Portfolio}}{\partial X_1} \quad \frac{\partial P_{Portfolio}}{\partial X_2} \quad \frac{\partial P_{Portfolio}}{\partial X_3} \right)^T \quad (8-21)$$

numerisch zu bestimmen, sind insgesamt 12 Instrumentenneubewertungen notwendig (vgl. Tabelle 8-8).

---

<sup>28</sup> Es wird eine symmetrische Gamma-Matrix unterstellt. D.h. für die Kreuz-Gammas gilt  $\gamma_{i,j}^{Inst} = \gamma_{j,i}^{Inst} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ . Deshalb müssen nur  $n(n-1)/2$  Kreuz-Gammas berechnet werden.

Tabelle 8-8: Anzahl Instrumentenberechnungen zur numerischen Schätzung des Delta-Vektors

Portfoliosensitivität gegenüber dem Marktfaktor	Vom entsprechenden Marktfaktor abhängige Preisfunktionen	Anzahl betroffene Preisfunktionen	Anzahl Neuberechnungen pro Instrumenten-Delta	Anzahl Instrumentenberechnungen pro Portfolio-Delta
$\frac{\partial P_{Portfolio}}{\partial X_1}$	$P_A, P_B, P_C$	3	2	6
$\frac{\partial P_{Portfolio}}{\partial X_2}$	$P_B, P_C$	2	2	4
$\frac{\partial P_{Portfolio}}{\partial X_3}$	$P_C$	1	2	2
Gesamtanzahl Instrumentenneuberechnungen				12

Bei der Berechnung der Elemente der Gamma-Matrix  $\underline{\Gamma} = (\gamma_{i,j})_{i,j=1}^3$  wird unterschieden

zwischen den Gammas  $\left\{ \frac{\partial P_{Portfolio}}{\partial X_i \cdot \partial X_i} \mid i = 1, 2, 3 \right\}$  und den Kreuz-Gammas

$$\left\{ \frac{\partial P_{Portfolio}}{\partial X_i \cdot \partial X_j} \mid i, j = 1, 2, 3 \wedge i \neq j \right\}.$$

Für die numerische Schätzung der Gammas sind für das vorliegende Portfolio 12 Instrumentenneuberechnungen (vgl. Tabelle 8-9) und für die Kreuz-Gammas deren 16 nötig (vgl. Tabelle 8-10).

Tabelle 8-9: Anzahl Instrumentenberechnungen zur numerischen Schätzung der Gammas

Portfoliosensitivität gegenüber dem Marktfaktor	Vom entsprechenden Marktfaktor abhängige Preisfunktionen	Anzahl betroffene Preisfunktionen	Anzahl Neubewertungen pro Instrumenten-Gamma	Anzahl Instrumentenberechnungen pro Portfolio-Gamma
$\frac{\partial^2 P_{Portfolio}}{\partial X_1 \cdot \partial X_1}$	$P_A, P_B, P_C$	3	2	6
$\frac{\partial^2 P_{Portfolio}}{\partial X_2 \cdot \partial X_2}$	$P_B, P_C$	2	2	4
$\frac{\partial^2 P_{Portfolio}}{\partial X_3 \cdot \partial X_3}$	$P_C$	1	2	2
Gesamtanzahl Instrumentenneuberechnungen				12

Tabelle 8-10: Anzahl Instrumentenberechnungen zur numerischen Schätzung der Kreuz-Gammas<sup>29</sup>

Portfoliosensitivität gegenüber dem Marktfaktor	Vom entsprechenden Marktfaktor abhängige Preisfunktionen	Anzahl betroffene Preisfunktionen	Anzahl Neubewertungen pro Instrumenten-Kreuz-Gamma	Anzahl Instrumentenberechnungen pro Portfolio-Kreuz-Gamma
$\frac{\partial^2 P_{Portfolio}}{\partial X_2 \cdot \partial X_1}$	$P_B, P_C$	2	4	8
$\frac{\partial^2 P_{Portfolio}}{\partial X_3 \cdot \partial X_1}$	$P_C$	1	4	4
$\frac{\partial^2 P_{Portfolio}}{\partial X_3 \cdot \partial X_2}$	$P_C$	1	4	4
Gesamtanzahl Instrumentenneuberechnungen				16

Wie man leicht überprüfen kann, stimmen die Resultate des Beispiels mit der Anzahl Instrumentenberechnungen (*AIB*), wie sie im Unterabschnitt 6.2 definiert wurden, überein.<sup>30</sup>

Für das vorliegende Portfolio gilt

$$A_1 = A_2 = A_3 = 1. \quad (8-22)$$

<sup>29</sup> Unter Voraussetzung einer symmetrischen Gamma-Matrix  $\gamma_{i,j} = \gamma_{j,i} \quad \forall i, j \in \{1,2,3\}$ .

<sup>30</sup> Vgl. 6.2 Methodenspezifischer Rechenaufwand

Gemäss der Gleichung (6–3) müssen für die Delta-Methode insgesamt

$$AIB^{Del} = \sum_{i=1}^M A_i \cdot 2 \cdot i = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 = 12 \quad (8-23)$$

Instrumentenneuberechnungen durchgeführt werden (vgl. Resultat der Tabelle 8-8).

Für die Delta-Gamma-Methode sind gemäss der Gleichung (6–4)

$$AIB^{DG} = \sum_{i=1}^M A_i \cdot 2 \cdot i \cdot (1+i) = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (1+1) + 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (1+2) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1+3) = 40 \quad (8-24)$$

Instrumentenneuberechnungen nötig. Zählt man die Anzahl Instrumentenneuberechnungen, die zur Schätzung des Delta-Vektors (12) und der Gamma-Matrix (12 für die Gammas und 16 für die Kreuz-Gammas) erforderlich sind, zusammen, so erhält man ebenfalls 40 Instrumentenneuberechnungen.

## 9 Anhang mit Testresultaten

### 9.1 Testresultate des Long-Bond-Portfolios

Tabelle 9-1: Eintägiger VaR(95%) des LB-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	0.2	0.1	5	0.2	0.2	16	0.1	0.1	79
	neut	0.9	0.1	5	1.0	0.3	16	0.2	0.5	79
	pess	1.7	0.1	5	1.8	0.3	16	0.4	0.7	79
Delta-Gamma	opt	0.3	0.2	10	0.2	0.2	6	0.0	0.1	84
	neut	1.0	0.2	10	1.0	0.2	6	0.2	0.4	84
	pess	1.8	0.3	10	1.8	0.2	6	0.3	0.7	84
PCA-1	opt	3.0	1.9	95	0.7	0.0	0	2.9	3.5	5
	neut	3.8	1.9	95	1.4	0.0	0	3.6	4.1	5
	pess	4.6	1.9	95	2.2	0.0	0	4.3	4.8	5
PCA-2	opt	0.6	0.5	39	0.3	0.3	2	0.2	0.5	59
	neut	1.3	0.5	39	1.1	0.3	2	0.5	0.9	59
	pess	2.1	0.5	39	2.0	0.3	2	0.9	1.4	59
PCA-3	opt	0.4	0.4	28	0.3	0.3	2	0.1	0.3	70
	neut	1.2	0.4	28	1.1	0.3	2	0.4	0.7	70
	pess	2.0	0.4	28	2.0	0.3	2	0.6	1.1	70
PCA-4*	opt	0.4	0.3	16	0.3	0.3	4	0.1	0.2	80
	neut	1.1	0.3	16	1.1	0.3	4	0.2	0.5	80
	pess	1.9	0.3	16	1.9	0.3	4	0.4	0.9	80
PLS-1	opt	3.1	2.3	57	2.0	1.7	23	2.2	3.2	20
	neut	3.8	2.3	57	2.8	1.7	23	2.8	3.7	20
	pess	4.6	2.2	57	3.6	1.7	23	3.5	4.3	20
PLS-2*	opt	2.3	2.1	44	2.3	1.8	38	1.9	2.7	18
	neut	3.1	2.0	44	3.1	1.8	38	2.5	3.3	18
	pess	3.9	2.0	44	3.9	1.8	38	3.2	3.9	18

\* Jeder zusätzliche Faktor führt zu keiner merklichen Verbesserung der Genauigkeit, weshalb auf die explizite Wiedergabe der entsprechenden Resultate verzichtet wird.

Tabelle 9-2: Zweiwöchiger VaR(95%) des LB-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	0.0	0.0	1	0.5	0.4	52	0.2	0.5	47
	neut	0.8	0.0	1	1.3	0.4	52	0.7	1.0	47
	peess	1.6	0.0	1	2.1	0.4	52	1.1	1.5	47
Delta-Gamma	opt	0.3	0.2	9	0.3	0.2	5	0.0	0.1	86
	neut	1.1	0.2	9	1.0	0.2	5	0.2	0.4	86
	peess	1.9	0.2	9	1.8	0.2	5	0.3	0.7	86
PCA-1	opt	4.7	2.1	100	0.0	0.0	0	4.7	5.1	0
	neut	5.4	2.1	100	0.0	0.0	0	5.4	5.8	0
	peess	6.2	2.1	100	0.0	0.0	0	6.2	6.5	0
PCA-2	opt	0.7	0.6	44	0.1	0.1	1	0.3	0.6	55
	neut	1.4	0.6	44	0.9	0.2	1	0.6	1.0	55
	peess	2.2	0.6	44	1.8	0.2	1	1.0	1.5	55
PCA-3*	opt	0.4	0.4	29	0.1	0.1	3	0.1	0.3	68
	neut	1.2	0.4	29	1.0	0.2	3	0.4	0.7	68
	peess	2.0	0.4	29	1.8	0.2	3	0.6	1.1	68
PLS-1	opt	3.3	2.3	68	2.1	1.5	19	2.6	3.5	13
	neut	4.0	2.3	68	2.9	1.6	19	3.3	4.1	13
	peess	4.8	2.3	68	3.7	1.6	19	4.0	4.7	13
PLS-2*	opt	2.3	1.8	43	2.7	2.0	36	2.0	2.8	21
	neut	3.1	1.8	43	3.5	2.0	36	2.6	3.4	21
	peess	3.9	1.8	43	4.3	2.0	36	3.2	4.0	21

\* Jeder zusätzliche Faktor führt zu keiner merklichen Verbesserung der Genauigkeit, weshalb auf die explizite Wiedergabe der entsprechenden Resultate verzichtet wird.

Tabelle 9-3: Zweiwöchiger VaR(99%) des LB-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	0.0	0.0	0	0.7	0.5	55	0.4	0.6	45
	neut	0.0	0.0	0	1.7	0.6	55	0.9	1.3	45
	peess	0.0	0.0	0	2.6	0.6	55	1.5	2.0	45
Delta-Gamma	opt	0.3	0.3	10	0.2	0.2	8	0.0	0.1	82
	neut	1.2	0.3	10	1.2	0.2	8	0.2	0.5	82
	peess	2.3	0.3	10	2.2	0.3	8	0.4	1.0	82
PCA-1	opt	4.4	2.1	100	0.0	0.0	0	4.4	4.9	0
	neut	5.3	2.1	100	0.0	0.0	0	5.3	5.7	0
	peess	6.3	2.1	100	0.0	0.0	0	6.3	6.6	0
PCA-2	opt	0.8	0.6	33	0.0	0.0	1	0.3	0.6	66
	neut	1.7	0.6	33	1.0	0.2	1	0.6	1.0	66
	peess	2.7	0.6	33	1.8	0.1	1	0.9	1.6	66
PCA-3*	opt	0.5	0.3	22	0.3	0.3	1	0.1	0.3	77
	neut	1.4	0.3	22	1.1	0.3	1	0.3	0.7	77
	peess	2.4	0.4	22	2.0	0.3	1	0.5	1.1	77
PLS-1	opt	3.2	2.3	66	1.9	1.4	19	2.4	3.3	15
	neut	4.1	2.3	66	3.0	1.4	19	3.3	4.1	15
	peess	5.0	2.3	66	4.0	1.5	19	4.1	4.9	15
PLS-2*	opt	2.3	1.8	42	2.6	1.9	35	1.9	2.7	23
	neut	3.2	1.8	42	3.6	1.9	35	2.6	3.4	23
	peess	4.2	1.7	42	4.6	1.9	35	3.4	4.2	23

\* Jeder zusätzliche Faktor führt zu keiner merklichen Verbesserung der Genauigkeit, weshalb auf die explizite Wiedergabe der entsprechenden Resultate verzichtet wird.

## 9.2 Testresultate des Long/Short-Bond-Portfolios

Tabelle 9-4: Eintägiger VaR(95%) des LSB-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	0.3	0.2	10	0.3	0.2	13	0.1	0.2	77
	neut	1.1	0.2	10	1.1	0.3	13	0.3	0.6	77
	peess	1.9	0.2	10	1.9	0.2	13	0.4	0.9	77
Delta-Gamma	opt	0.2	0.3	10	0.3	0.2	7	0.0	0.1	83
	neut	1.0	0.2	10	1.1	0.2	7	0.2	0.4	83
	peess	1.8	0.2	10	1.9	0.2	7	0.3	0.8	83
PCA-1	opt	24.5	24.1	100	0.0	0.0	0	24.5	34.4	0
	neut	25.1	23.9	100	0.0	0.0	0	25.1	34.7	0
	peess	25.7	23.7	100	0.0	0.0	0	25.7	35.0	0
PCA-2	opt	17.3	19.8	94	0.0	0.0	0	16.2	25.5	6
	neut	17.9	19.7	94	0.0	0.0	0	16.8	25.8	6
	peess	18.6	19.5	94	0.0	0.0	0	17.5	26.1	6
PCA-3	opt	13.4	16.3	90	0.0	0.0	0	12.1	20.0	10
	neut	14.1	16.1	90	0.9	0.0	0	12.7	20.3	10
	peess	14.8	16.0	90	1.6	0.0	0	13.3	20.7	10
PCA-4	opt	10.0	13.1	82	0.0	0.0	0	8.2	14.9	18
	neut	10.7	13.0	82	0.0	0.0	0	8.8	15.3	18
	peess	11.5	12.9	82	0.0	0.0	0	9.4	15.6	18
PCA-5	opt	8.1	11.5	78	0.1	0.2	0	6.3	12.4	22
	neut	8.8	11.4	78	1.0	0.3	0	6.9	12.7	22
	peess	9.5	11.3	78	1.8	0.3	0	7.4	13.0	22
PCA-6	opt	6.7	9.9	72	0.1	0.1	1	4.8	10.2	27
	neut	7.4	9.9	72	0.9	0.2	1	5.3	10.5	27
	peess	8.2	9.8	72	1.7	0.2	1	5.9	10.8	27
PCA-7	opt	4.3	6.8	62	0.1	0.1	1	2.6	6.3	37
	neut	5.0	6.7	62	0.9	0.2	1	3.1	6.6	37
	peess	5.8	6.7	62	1.7	0.2	1	3.6	7.0	37
PLS-1	opt	17.2	15.7	91	1.7	0.9	5	15.8	22.2	4
	neut	17.9	15.6	91	2.5	0.9	5	16.4	22.6	4
	peess	18.6	15.4	91	3.3	1.0	5	17.1	23.0	4
PLS-2	opt	8.4	9.7	71	2.0	1.8	17	6.3	10.9	12
	neut	9.2	9.6	71	2.9	1.8	17	7.0	11.3	12
	peess	9.9	9.5	71	3.7	1.8	17	7.6	11.7	12
PLS-3	opt	4.2	4.5	58	2.2	1.8	27	3.0	4.9	15
	neut	5.0	4.5	58	3.0	1.8	27	3.7	5.4	15
	peess	5.7	4.5	58	3.9	1.9	27	4.4	6.0	15
PLS-4	opt	2.6	2.3	48	2.3	1.8	33	2.0	2.9	19
	neut	3.4	2.2	48	3.2	1.8	33	2.7	3.5	19
	peess	4.2	2.2	48	4.0	1.8	33	3.3	4.1	19
PLS-5	opt	2.4	1.7	43	2.4	1.8	36	1.9	2.6	21
	neut	3.1	1.7	43	3.2	1.8	36	2.5	3.2	21
	peess	3.9	1.7	43	4.1	1.8	36	3.1	3.9	21
PLS-6	opt	2.2	1.7	43	2.4	1.8	36	1.8	2.6	21
	neut	3.0	1.7	43	3.2	1.8	36	2.5	3.2	21
	peess	3.8	1.7	43	4.1	1.8	36	3.1	3.8	21
PLS-7	opt	2.2	1.7	43	2.4	1.8	37	1.8	2.6	20
	neut	3.0	1.7	43	3.2	1.8	37	2.5	3.2	20
	peess	3.8	1.7	43	4.0	1.9	37	3.1	3.8	20

Tabelle 9-5: Zweiwöchiger VaR(95%) des LSB-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	0.8	0.6	39	0.6	0.6	27	0.5	0.7	34
	neut	1.5	0.6	39	1.4	0.6	27	1.0	1.3	34
	pess	2.3	0.5	39	2.2	0.7	27	1.5	1.9	34
Delta-Gamma	opt	0.3	0.2	16	0.4	0.4	2	0.1	0.2	82
	neut	1.1	0.2	16	1.2	0.4	2	0.2	0.5	82
	pess	1.9	0.2	16	1.9	0.3	2	0.3	0.8	82
PCA-1	opt	28.8	24.5	100	0.0	0.0	0	28.8	37.8	0
	neut	29.4	24.3	100	0.0	0.0	0	29.4	38.1	0
	pess	29.9	24.1	100	0.0	0.0	0	29.9	38.4	0
PCA-2	opt	20.0	21.5	95	0.0	0.0	0	19.0	28.6	5
	neut	20.6	21.3	95	0.0	0.0	0	19.6	28.9	5
	pess	21.2	21.1	95	0.0	0.0	0	20.2	29.2	5
PCA-3	opt	12.8	15.8	89	0.6	0.0	0	11.4	19.2	11
	neut	13.5	15.7	89	1.4	0.0	0	12.0	19.5	11
	pess	14.2	15.5	89	2.2	0.0	0	12.6	19.8	11
PCA-4	opt	11.8	15.1	86	0.3	0.4	1	10.2	17.8	13
	neut	12.5	15.0	86	1.2	0.3	1	10.8	18.1	13
	pess	13.2	14.9	86	2.0	0.3	1	11.4	18.5	13
PCA-5	opt	8.0	11.0	78	0.4	0.4	1	6.2	12.0	21
	neut	8.7	10.9	78	1.2	0.3	1	6.8	12.3	21
	pess	9.4	10.8	78	2.1	0.3	1	7.4	12.6	21
PCA-6	opt	6.8	8.4	73	0.3	0.4	1	5.0	9.2	26
	neut	7.5	8.4	73	1.2	0.3	1	5.5	9.6	26
	pess	8.3	8.3	73	2.0	0.4	1	6.0	10.0	26
PCA-7	opt	5.4	7.0	68	0.3	0.3	2	3.7	7.3	30
	neut	6.2	7.0	68	1.2	0.3	2	4.2	7.7	30
	pess	6.9	6.9	68	2.0	0.3	2	4.8	8.1	30
PLS-1	opt	18.8	15.2	95	1.1	0.7	1	17.8	23.5	4
	neut	19.4	15.1	95	1.9	0.7	1	18.5	24.0	4
	pess	20.1	15.0	95	2.7	0.7	1	19.1	24.4	4
PLS-2	opt	8.0	8.1	72	1.8	1.8	15	6.0	9.7	13
	neut	8.7	8.0	72	2.6	1.8	15	6.7	10.1	13
	pess	9.4	7.9	72	3.4	1.8	15	7.3	10.6	13
PLS-3	opt	3.8	3.2	58	2.4	1.9	25	2.8	4.1	17
	neut	4.5	3.1	58	3.2	1.9	25	3.4	4.6	17
	pess	5.3	3.1	58	4.0	1.9	25	4.1	5.2	17
PLS-4	opt	2.6	1.9	46	2.4	2.0	35	2.1	2.9	19
	neut	3.4	1.9	46	3.2	2.1	35	2.7	3.5	19
	pess	4.2	1.9	46	4.1	2.1	35	3.3	4.1	19
PLS-5	opt	2.4	1.7	43	2.5	2.1	38	2.0	2.8	19
	neut	3.2	1.7	43	3.3	2.1	38	2.6	3.4	19
	pess	3.9	1.7	43	4.1	2.1	38	3.3	4.0	19
PLS-6	opt	2.3	1.7	42	2.4	2.1	40	2.0	2.7	18
	neut	3.1	1.7	42	3.3	2.1	40	2.6	3.4	18
	pess	3.9	1.7	42	4.1	2.1	40	3.3	4.0	18
PLS-7	opt	2.4	1.7	41	2.4	2.1	40	1.9	2.7	19
	neut	3.1	1.7	41	3.3	2.1	40	2.6	3.3	19
	pess	3.9	1.7	41	4.1	2.1	40	3.2	4.0	19

Tabelle 9-6: Zweiwöchiger VaR(99%) des LSB-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	0.9	0.6	42	1.0	0.9	26	0.7	1.0	32
	neut	1.9	0.6	42	2.0	1.0	26	1.3	1.7	32
	pess	2.9	0.6	42	2.9	1.0	26	2.0	2.5	32
Delta-Gamma	opt	0.2	0.1	10	0.2	0.3	6	0.0	0.1	84
	neut	1.2	0.2	10	1.2	0.3	6	0.2	0.5	84
	pess	2.2	0.1	10	2.1	0.3	6	0.4	0.9	84
PCA-1	opt	28.7	24.6	100	0.0	0.0	0	28.7	37.7	0
	neut	29.4	24.3	100	0.0	0.0	0	29.4	38.1	0
	pess	30.1	24.1	100	0.0	0.0	0	30.1	38.5	0
PCA-2	opt	20.5	21.5	93	0.0	0.0	0	19.0	28.6	7
	neut	21.2	21.3	93	0.0	0.0	0	19.7	29.0	7
	pess	22.0	21.1	93	0.0	0.0	0	20.5	29.4	7
PCA-3	opt	13.3	15.9	85	0.0	0.0	0	11.3	19.1	15
	neut	14.2	15.8	85	0.0	0.0	0	12.0	19.5	15
	pess	15.0	15.6	85	0.0	0.0	0	12.8	20.0	15
PCA-4	opt	12.4	15.3	81	0.0	0.0	0	10.1	17.7	19
	neut	13.3	15.1	81	0.0	0.0	0	10.7	18.1	19
	pess	14.1	15.0	81	0.0	0.0	0	11.4	18.5	19
PCA-5	opt	8.3	11.1	73	0.1	0.0	0	6.1	11.9	27
	neut	9.2	11.0	73	1.2	0.0	0	6.7	12.3	27
	pess	10.1	10.9	73	2.3	0.0	0	7.4	12.7	27
PCA-6	opt	7.0	8.5	69	0.5	0.0	0	4.8	9.1	31
	neut	7.9	8.4	69	1.5	0.0	0	5.5	9.6	31
	pess	8.8	8.3	69	2.6	0.0	0	6.1	10.1	31
PCA-7	opt	5.5	7.0	66	0.4	0.4	1	3.7	7.3	33
	neut	6.4	7.0	66	1.4	0.4	1	4.3	7.7	33
	pess	7.4	6.9	66	2.4	0.3	1	4.9	8.2	33
PLS-1	opt	18.5	15.3	96	1.6	0.9	1	17.8	23.5	3
	neut	19.3	15.1	96	2.6	0.8	1	18.6	24.0	3
	pess	20.1	15.0	96	3.6	1.0	1	19.4	24.6	3
PLS-2	opt	7.8	8.1	73	1.7	1.7	14	5.9	9.6	13
	neut	8.7	8.0	73	2.8	1.7	14	6.7	10.2	13
	pess	9.6	8.0	73	3.8	1.8	14	7.5	10.8	13
PLS-3	opt	3.7	3.2	57	2.3	1.9	24	2.7	4.0	19
	neut	4.7	3.1	57	3.4	1.9	24	3.5	4.7	19
	pess	5.6	3.1	57	4.4	1.9	24	4.3	5.4	19
PLS-4	opt	2.7	2.0	43	2.4	2.0	33	1.9	2.8	24
	neut	3.6	1.9	43	3.5	2.0	33	2.7	3.5	24
	pess	4.5	1.9	43	4.5	2.0	33	3.4	4.3	24
PLS-5	opt	2.5	1.6	39	2.4	2.0	37	1.9	2.7	24
	neut	3.4	1.6	39	3.5	2.0	37	2.6	3.4	24
	pess	4.4	1.6	39	4.5	2.0	37	3.4	4.2	24
PLS-6	opt	2.4	1.6	38	2.5	2.0	37	1.8	2.6	25
	neut	3.4	1.6	38	3.5	2.0	37	2.6	3.4	25
	pess	4.3	1.6	38	4.5	2.0	37	3.3	4.1	25
PLS-7	opt	2.4	1.6	38	2.4	2.0	37	1.8	2.6	25
	neut	3.3	1.6	38	3.5	2.1	37	2.6	3.3	25
	pess	4.3	1.6	38	4.5	2.1	37	3.3	4.1	25

### 9.3 Testresultate des Hedged-Long/Short-Bond-Portfolios

Tabelle 9-7: Eintägiger VaR(95%) des HLSB-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> In %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	0.2	0.1	9	0.4	0.3	15	0.1	0.2	76
	neut	1.0	0.2	9	1.2	0.3	15	0.3	0.6	76
	peess	1.8	0.2	9	2.0	0.3	15	0.5	0.9	76
Delta-Gamma	opt	0.2	0.1	5	0.3	0.2	14	0.1	0.1	81
	neut	1.0	0.1	5	1.1	0.2	14	0.2	0.5	81
	peess	1.9	0.1	5	1.9	0.3	14	0.4	0.8	81
PCA-1	opt	78.1	16.6	100	0.0	0.0	0	78.1	79.9	0
	neut	78.3	16.4	100	0.0	0.0	0	78.3	80.0	0
	peess	78.5	16.3	100	0.0	0.0	0	78.5	80.2	0
PCA-2	opt	61.5	19.3	100	0.0	0.0	0	61.5	64.5	0
	neut	61.9	19.1	100	0.0	0.0	0	61.9	64.7	0
	peess	62.2	19.0	100	0.0	0.0	0	62.2	65.0	0
PCA-3	opt	50.0	22.2	100	0.0	0.0	0	50.0	54.6	0
	neut	50.4	22.0	100	0.0	0.0	0	50.4	54.9	0
	peess	50.7	21.8	100	0.0	0.0	0	50.7	55.2	0
PCA-4	opt	38.1	22.8	100	0.0	0.0	0	38.1	44.4	0
	neut	38.6	22.6	100	0.0	0.0	0	38.6	44.7	0
	peess	39.1	22.5	100	0.0	0.0	0	39.1	45.1	0
PCA-5	opt	29.2	21.1	100	0.0	0.0	0	29.2	36.1	0
	neut	29.8	20.9	100	0.0	0.0	0	29.8	36.4	0
	peess	30.4	20.8	100	0.0	0.0	0	30.4	36.8	0
PCA-6	opt	23.3	18.3	99	0.0	0.0	0	23.1	29.5	1
	neut	23.9	18.1	99	0.0	0.0	0	23.7	29.9	1
	peess	24.6	18.0	99	0.0	0.0	0	24.3	30.3	1
PCA-7	opt	12.7	12.0	95	0.0	0.0	0	12.1	17.0	5
	neut	13.4	11.9	95	0.8	0.0	0	12.7	17.5	5
	peess	14.1	11.8	95	1.6	0.0	0	13.4	17.9	5
PLS-1	opt	48.3	14.1	100	0.0	0.0	0	48.3	50.3	0
	neut	48.7	13.9	100	0.0	0.0	0	48.7	50.6	0
	peess	49.1	13.8	100	0.0	0.0	0	49.1	51.0	0
PLS-2	opt	22.8	13.1	98	0.0	0.0	0	22.3	26.0	2
	neut	23.4	13.0	98	0.0	0.0	0	22.9	26.5	2
	peess	24.0	12.9	98	0.0	0.0	0	23.5	27.0	2
PLS-3	opt	8.5	6.4	88	1.4	1.0	7	7.6	10.0	5
	neut	9.2	6.3	88	2.2	1.0	7	8.3	10.5	5
	peess	10.0	6.3	88	3.0	1.0	7	9.0	11.1	5
PLS-4	opt	3.6	3.0	62	2.2	1.8	21	2.7	3.9	17
	neut	4.3	3.0	62	3.0	1.8	21	3.3	4.4	17
	peess	5.1	2.9	62	3.8	1.8	21	4.0	5.0	17
PLS-5	opt	2.6	2.1	49	2.3	1.9	30	2.0	2.8	21
	neut	3.4	2.1	49	3.1	1.9	30	2.6	3.4	21
	peess	4.1	2.1	49	3.9	1.9	30	3.2	4.0	21
PLS-6	opt	2.5	1.9	46	2.3	1.9	32	1.9	2.7	22
	neut	3.3	1.9	46	3.2	1.9	32	2.5	3.3	22
	peess	4.0	1.9	46	4.0	1.9	32	3.1	3.9	22
PLS-7	opt	2.5	1.9	46	2.4	1.9	33	1.9	2.7	21
	neut	3.2	1.9	46	3.2	1.9	33	2.5	3.3	21
	peess	4.0	1.9	46	4.0	1.9	33	3.2	3.9	21

Tabelle 9-8: Zweiwöchiger VaR(95%) des HLSB-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> In %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	0.5	0.4	21	0.7	0.4	17	0.2	0.4	62
	neut	1.3	0.5	21	1.5	0.4	17	0.5	0.9	62
	pess	2.1	0.5	21	2.3	0.4	17	0.8	1.4	62
Delta-Gamma	opt	0.2	0.2	12	0.2	0.1	3	0.0	0.1	85
	neut	1.0	0.2	12	1.0	0.1	3	0.2	0.4	85
	pess	1.8	0.2	12	1.7	0.1	3	0.3	0.7	85
PCA-1	opt	82.0	10.9	100	0.0	0.0	0	82.0	82.7	0
	neut	82.1	10.8	100	0.0	0.0	0	82.1	82.8	0
	pess	82.3	10.7	100	0.0	0.0	0	82.3	83.0	0
PCA-2	opt	67.6	15.8	100	0.0	0.0	0	67.6	69.4	0
	neut	67.9	15.6	100	0.0	0.0	0	67.9	69.7	0
	pess	68.1	15.5	100	0.0	0.0	0	68.1	69.9	0
PCA-3	opt	43.8	23.3	100	0.0	0.0	0	43.8	49.6	0
	neut	44.3	23.1	100	0.0	0.0	0	44.3	49.9	0
	pess	44.7	22.9	100	0.0	0.0	0	44.7	50.2	0
PCA-4	opt	39.2	22.9	100	0.0	0.0	0	39.2	45.4	0
	neut	39.7	22.7	100	0.0	0.0	0	39.7	45.7	0
	pess	40.2	22.5	100	0.0	0.0	0	40.2	46.0	0
PCA-5	opt	26.3	18.8	100	0.0	0.0	0	26.3	32.3	0
	neut	26.9	18.7	100	0.0	0.0	0	26.9	32.7	0
	pess	27.5	18.6	100	0.0	0.0	0	27.5	33.1	0
PCA-6	opt	21.0	16.9	100	0.0	0.0	0	21.0	26.9	0
	neut	21.6	16.7	100	0.0	0.0	0	21.6	27.3	0
	pess	22.2	16.6	100	0.0	0.0	0	22.2	27.7	0
PCA-7	opt	14.9	12.7	99	0.0	0.0	0	14.8	19.5	1
	neut	15.6	12.6	99	0.0	0.0	0	15.4	20.0	1
	pess	16.3	12.5	99	0.0	0.0	0	16.1	20.4	1
PLS-1	opt	49.8	12.2	100	0.0	0.0	0	49.8	51.2	0
	neut	50.2	12.1	100	0.0	0.0	0	50.2	51.6	0
	pess	50.6	12.0	100	0.0	0.0	0	50.6	52.0	0
PLS-2	opt	19.8	11.6	98	1.7	0.0	1	19.4	22.7	1
	neut	20.4	11.5	98	2.5	0.0	1	20.0	23.2	1
	pess	21.1	11.4	98	3.2	0.0	1	20.7	23.7	1
PLS-3	opt	8.4	6.7	87	1.4	1.7	5	7.4	10.1	8
	neut	9.2	6.7	87	2.2	1.7	5	8.1	10.6	8
	pess	9.9	6.6	87	3.0	1.7	5	8.7	11.1	8
PLS-4	opt	2.9	2.4	62	2.5	1.9	28	2.5	3.4	10
	neut	3.7	2.3	62	3.3	1.9	28	3.2	4.0	10
	pess	4.5	2.3	62	4.2	1.9	28	3.9	4.6	10
PLS-5	opt	2.6	1.7	42	2.7	2.0	35	2.0	2.8	23
	neut	3.3	1.7	42	3.5	2.1	35	2.6	3.4	23
	pess	4.1	1.7	42	4.3	2.1	35	3.2	4.0	23
PLS-6	opt	2.3	1.7	41	2.8	2.0	36	2.0	2.8	23
	Neut	3.1	1.6	41	3.6	2.0	36	2.6	3.3	23
	Pess	3.9	1.6	41	4.4	2.0	36	3.2	4.0	23
PLS-7	Opt	2.3	1.7	41	2.6	2.1	39	2.0	2.8	20
	Neut	3.1	1.6	41	3.4	2.1	39	2.6	3.3	20
	Pess	3.8	1.6	41	4.2	2.1	39	3.2	4.0	20

Tabelle 9-9: Zweiwöchiger VaR(99%) des HLSB-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	0.9	0.9	17	0.5	0.3	21	0.3	0.6	62
	neut	1.9	0.8	17	1.4	0.4	21	0.6	1.1	62
	pess	2.9	0.8	17	2.3	0.3	21	1.0	1.6	62
Delta-Gamma	opt	0.3	0.3	10	0.2	0.3	5	0.0	0.2	85
	neut	1.3	0.3	10	1.2	0.2	5	0.2	0.5	85
	pess	2.3	0.3	10	2.2	0.3	5	0.3	0.9	85
PCA-1	opt	82.0	10.9	100	0.0	0.0	0	82.0	82.7	0
	neut	82.2	10.8	100	0.0	0.0	0	82.2	82.9	0
	pess	82.4	10.7	100	0.0	0.0	0	82.4	83.0	0
PCA-2	opt	67.6	15.8	100	0.0	0.0	0	67.6	69.4	0
	neut	67.9	15.7	100	0.0	0.0	0	67.9	69.7	0
	pess	68.2	15.5	100	0.0	0.0	0	68.2	69.9	0
PCA-3	opt	43.7	23.3	100	0.0	0.0	0	43.7	49.5	0
	neut	44.3	23.1	100	0.0	0.0	0	44.3	49.9	0
	pess	44.8	22.8	100	0.0	0.0	0	44.8	50.3	0
PCA-4	opt	39.1	22.9	100	0.0	0.0	0	39.1	45.3	0
	neut	39.7	22.7	100	0.0	0.0	0	39.7	45.7	0
	pess	40.3	22.4	100	0.0	0.0	0	40.3	46.1	0
PCA-5	opt	26.1	18.9	100	0.0	0.0	0	26.1	32.2	0
	neut	26.8	18.7	100	0.0	0.0	0	26.8	32.7	0
	pess	27.6	18.5	100	0.0	0.0	0	27.6	33.2	0
PCA-6	opt	20.8	16.9	100	0.0	0.0	0	20.8	26.8	0
	neut	21.5	16.8	100	0.0	0.0	0	21.5	27.3	0
	pess	22.3	16.6	100	0.0	0.0	0	22.3	27.8	0
PCA-7	opt	14.6	12.8	100	0.0	0.0	0	14.6	19.4	0
	neut	15.4	12.7	100	0.0	0.0	0	15.4	20.0	0
	pess	16.3	12.5	100	0.0	0.0	0	16.3	20.6	0
PLS-1	opt	49.7	12.3	100	0.0	0.0	0	49.7	51.2	0
	neut	50.2	12.2	100	0.0	0.0	0	50.2	51.6	0
	pess	50.7	12.0	100	0.0	0.0	0	50.7	52.1	0
PLS-2	opt	19.7	11.7	98	0.7	0.3	2	19.3	22.6	0
	neut	20.5	11.5	98	1.8	0.3	2	20.1	23.3	0
	pess	21.3	11.4	98	2.8	0.2	2	20.9	23.9	0
PLS-3	opt	8.5	6.7	85	1.6	1.7	5	7.3	10.0	10
	neut	9.4	6.7	85	2.6	1.8	5	8.1	10.6	10
	pess	10.3	6.6	85	3.6	1.8	5	8.9	11.3	10
PLS-4	opt	2.8	2.4	59	2.4	1.7	27	2.3	3.2	14
	neut	3.8	2.3	59	3.5	1.7	27	3.2	4.0	14
	pess	4.8	2.3	59	4.5	1.7	27	4.0	4.8	14
PLS-5	opt	2.2	1.7	42	3.0	1.7	30	1.8	2.6	28
	neut	3.2	1.7	42	4.1	1.8	30	2.6	3.4	28
	pess	4.2	1.7	42	5.1	1.8	30	3.3	4.2	28
PLS-6	opt	2.1	1.6	40	2.6	1.9	37	1.8	2.6	23
	neut	3.0	1.6	40	3.6	1.9	37	2.5	3.3	23
	pess	4.0	1.6	40	4.7	1.9	37	3.3	4.1	23
PLS-7	opt	2.0	1.6	39	2.7	1.8	35	1.7	2.5	26
	neut	3.0	1.6	39	3.8	1.9	35	2.5	3.3	26
	pess	3.9	1.6	39	4.8	1.9	35	3.2	4.0	26

## 9.4 Testresultate des Short-Caplet/Floorlet-Portfolios

Tabelle 9-10: Eintägiger VaR(95%) des SCF-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	55.3	15.2	100	0.0	0.0	0	55.3	57.3	0
	neut	56.6	14.7	100	0.0	0.0	0	56.6	58.4	0
	pess	57.9	14.2	100	0.0	0.0	0	57.9	59.6	0
Delta-Gamma	opt	0.0	0.0	0	1.2	0.9	16	0.2	0.6	84
	neut	0.0	0.0	0	3.6	0.8	16	0.6	1.5	84
	pess	0.0	0.0	0	5.9	0.9	16	0.9	2.4	84
PCA-1	opt	16.7	18.1	96	0.0	0.0	0	16.0	24.1	4
	neut	19.2	17.4	96	0.0	0.0	0	18.3	25.3	4
	pess	21.8	16.6	96	0.0	0.0	0	20.8	26.7	4
PCA-2	opt	18.6	14.7	42	1.2	0.8	13	7.9	15.3	45
	neut	20.7	14.0	42	4.7	1.0	13	9.2	16.2	45
	pess	22.9	13.3	42	8.0	1.2	13	10.6	17.3	45
PCA-3	opt	8.4	5.5	31	2.0	1.4	29	3.2	5.8	40
	neut	10.6	5.3	31	5.4	1.6	29	4.9	7.3	40
	pess	12.9	5.0	31	8.9	1.7	29	6.6	9.1	40
PCA-4	opt	4.6	3.8	12	3.5	2.5	50	2.3	3.7	38
	neut	6.8	3.7	12	7.0	2.7	50	4.2	5.9	38
	pess	9.2	3.6	12	10.3	2.9	50	6.2	8.3	38
PCA-5	opt	2.6	1.2	3	6.4	3.6	81	5.2	6.6	16
	neut	5.2	1.0	3	9.8	3.5	81	8.0	9.4	16
	pess	7.9	0.9	3	13.0	3.6	81	10.7	12.2	16
PLS-1	opt	20.7	19.2	73	2.4	2.4	5	15.3	24.2	22
	neut	23.0	18.4	73	5.7	2.7	5	17.2	25.3	22
	pess	25.4	17.6	73	8.8	2.8	5	19.1	26.6	22
PLS-2	opt	14.1	11.0	43	3.3	2.7	22	6.8	11.9	35
	neut	16.5	10.2	43	6.8	2.9	22	8.6	13.2	35
	pess	18.9	9.6	43	10.1	2.9	22	10.4	14.8	35
PLS-3	opt	9.7	8.6	27	4.4	4.2	53	4.9	8.0	20
	neut	11.9	8.1	27	7.9	4.3	53	7.4	9.9	20
	pess	14.3	7.8	27	11.2	4.4	53	9.7	12.1	20
PLS-4	opt	7.3	7.2	14	6.6	5.7	71	5.7	8.3	15
	neut	9.6	6.8	14	10.1	5.8	71	8.5	10.8	15
	pess	11.9	6.4	14	13.5	5.8	71	11.3	13.4	15
PLS-5	opt	10.1	6.8	4	9.0	6.8	81	7.7	10.4	15
	neut	12.1	6.5	4	12.5	6.8	81	10.6	13.1	15
	pess	14.1	6.2	4	15.8	6.8	81	13.4	15.8	15

Tabelle 9-11: Zweiwöchiger VaR(95%) des SCF-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	83.5	8.1	100	0.0	0.0	0	83.5	83.9	0
	neut	84.0	7.9	100	0.0	0.0	0	84.0	84.4	0
	pess	84.6	7.6	100	0.0	0.0	0	84.6	84.9	0
Delta-Gamma	opt	0.0	0.0	0	10.1	11.0	70	7.1	12.5	30
	neut	0.0	0.0	0	13.4	10.8	70	9.4	14.4	30
	pess	0.0	0.0	0	16.7	10.6	70	11.7	16.6	30
PCA-1	opt	9.6	12.5	84	0.0	0.0	0	8.1	14.5	16
	neut	12.4	11.8	84	0.0	0.0	0	10.4	15.7	16
	pess	15.2	11.1	84	0.0	0.0	0	12.7	17.2	16
PCA-2	opt	15.8	8.5	21	1.4	1.1	21	3.7	8.3	58
	neut	17.9	7.9	21	4.9	1.3	21	4.9	9.3	58
	pess	19.9	7.3	21	8.1	1.4	21	6.0	10.5	58
PCA-3	opt	4.8	2.3	17	2.5	1.9	45	1.9	3.0	38
	neut	6.9	2.2	17	6.0	2.0	45	3.9	5.2	38
	pess	8.9	2.1	17	9.4	2.0	45	5.7	7.4	38
PCA-4	opt	0.4	0.2	2	3.9	3.0	69	2.7	4.1	29
	neut	2.3	0.3	2	7.4	3.1	69	5.2	6.7	29
	pess	4.4	0.4	2	10.8	3.2	69	7.5	9.4	29
PCA-5	opt	0.0	0.0	0	5.9	3.1	97	5.7	6.5	3
	neut	0.0	0.0	0	9.3	3.1	97	9.0	9.7	3
	pess	0.0	0.0	0	12.7	3.2	97	12.3	12.9	3
PLS-1	opt	25.3	24.9	73	3.9	3.1	7	18.6	30.2	20
	neut	27.5	24.0	73	7.6	3.6	7	20.5	31.2	20
	pess	29.8	23.1	73	11.0	4.0	7	22.4	32.2	20
PLS-2	opt	12.4	14.3	46	4.0	3.8	24	6.7	13.1	30
	neut	14.9	13.6	46	7.6	4.0	24	8.7	14.3	30
	pess	17.4	13.0	46	11.2	4.3	24	10.7	15.8	30
PLS-3	opt	8.4	8.9	22	7.5	7.6	50	5.7	9.5	28
	neut	10.9	8.3	22	11.1	7.9	50	8.0	11.6	28
	pess	13.4	7.8	22	14.6	8.1	50	10.3	13.9	28
PLS-4	opt	5.6	5.7	12	8.4	8.8	73	6.8	10.8	15
	neut	8.0	5.2	12	11.9	9.1	73	9.7	13.3	15
	pess	10.4	4.8	12	15.5	9.3	73	12.6	16.0	15
PLS-5	opt	7.0	4.9	4	9.9	9.0	84	8.6	12.4	12
	neut	9.3	4.0	4	13.5	9.3	84	11.7	15.1	12
	pess	11.3	3.8	4	17.1	9.5	84	14.8	18.0	12

Tabelle 9-12: Zweiwöchiger VaR(99%) des SCF-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	85.2	7.2	100	0.0	0.0	0	85.2	85.5	0
	neut	85.8	6.9	100	0.0	0.0	0	85.8	86.0	0
	pess	86.4	6.5	100	0.0	0.0	0	86.4	86.7	0
Delta-Gamma	opt	0.0	0.0	0	13.4	13.6	73	9.8	16.3	27
	neut	0.0	0.0	0	18.3	13.7	73	13.4	19.6	27
	pess	0.0	0.0	0	23.1	13.5	73	17.0	22.9	27
PCA-1	opt	8.2	8.1	88	0.0	0.0	0	7.2	10.8	12
	neut	11.9	7.5	88	0.0	0.0	0	10.4	13.1	12
	pess	15.8	6.9	88	0.0	0.0	0	13.9	16.2	12
PCA-2	opt	7.4	6.9	36	0.5	0.7	2	2.7	6.1	62
	neut	10.8	6.3	36	4.9	0.2	2	4.0	7.5	62
	pess	14.4	5.8	36	10.2	2.1	2	5.4	9.4	62
PCA-3	opt	2.9	2.5	25	1.1	1.1	10	0.9	2.0	65
	neut	6.2	2.3	25	5.9	1.6	10	2.2	3.8	65
	pess	9.8	2.3	25	11.0	1.8	10	3.6	6.2	65
PCA-4	opt	1.3	1.1	6	1.9	1.8	21	0.5	1.2	73
	neut	4.8	1.3	6	6.8	2.1	21	1.7	3.5	73
	pess	8.9	1.5	6	11.7	2.7	21	3.0	5.9	73
PCA-5	opt	0.0	0.0	0	2.3	1.8	43	1.0	1.9	57
	neut	0.0	0.0	0	6.8	2.3	43	2.9	4.7	57
	pess	0.0	0.0	0	11.3	2.9	43	4.8	7.6	57
PLS-1	opt	23.4	23.2	74	1.3	1.1	3	17.4	28.4	23
	neut	26.4	22.2	74	6.8	1.5	3	19.7	29.7	23
	pess	29.6	21.1	74	12.2	3.1	3	22.3	31.4	23
PLS-2	opt	10.2	12.1	52	2.2	1.9	11	5.5	11.4	37
	neut	13.6	11.5	52	7.3	2.4	11	7.9	13.1	37
	pess	17.3	11.0	52	12.1	3.3	11	10.4	15.3	37
PLS-3	opt	6.4	6.5	31	6.5	7.4	23	3.4	6.9	46
	neut	9.9	6.0	31	11.8	7.7	23	5.7	9.3	46
	pess	13.6	5.7	31	16.6	8.4	23	8.0	12.1	46
PLS-4	opt	5.0	4.7	17	6.6	7.4	34	3.1	6.5	49
	neut	8.4	4.3	17	11.8	7.8	34	5.5	9.2	49
	pess	12.0	4.2	17	16.5	8.6	34	7.7	12.1	49
PLS-5	opt	3.9	3.8	11	6.8	7.0	47	3.6	6.9	42
	neut	7.1	3.7	11	11.9	7.5	47	6.3	9.9	42
	pess	10.8	3.7	11	16.5	8.1	47	8.8	13.1	42

## 9.5 Testresultate des Digital-Option-Portfolios

Tabelle 9-13: Eintägiger VaR(95%) des DO-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	9.2	7.5	48	15.3	22.3	33	9.4	17.5	19
	neut	11.5	7.4	48	18.2	22.5	33	11.4	19.0	19
	pess	13.8	7.3	48	20.9	22.8	33	13.4	20.7	19
Delta-Gamma	opt	6.1	6.7	7	6.2	8.5	33	2.5	6.5	60
	neut	8.5	6.6	7	8.8	8.5	33	3.5	7.6	60
	pess	11.2	6.4	7	11.4	8.5	33	4.5	8.8	60
PCA-1	opt	53.7	28.5	98	0.0	0.0	0	52.6	60.2	2
	neut	54.8	27.8	98	0.0	0.0	0	53.7	60.9	2
	pess	56.0	27.1	98	0.0	0.0	0	54.8	61.6	2
PCA-2	opt	26.9	22.0	94	0.0	0.0	0	25.3	33.7	6
	neut	28.7	21.5	94	0.0	0.0	0	27.0	34.8	6
	pess	30.5	20.9	94	0.0	0.0	0	28.7	35.9	6
PCA-3	opt	19.6	17.7	93	0.0	0.0	1	18.2	25.5	6
	neut	21.6	17.3	93	2.8	0.0	1	20.1	26.6	6
	pess	23.6	16.8	93	5.9	0.0	1	22.0	27.9	6
PCA-4	opt	15.0	12.2	83	3.0	1.1	3	12.5	17.6	14
	neut	17.0	11.9	83	5.7	0.9	3	14.2	18.9	14
	pess	19.1	11.6	83	8.6	0.8	3	16.1	20.4	14
PCA-5	opt	12.9	12.6	76	5.5	1.7	4	10.0	15.7	20
	neut	15.0	12.2	76	8.2	1.9	4	11.7	16.9	20
	pess	17.2	11.9	76	11.4	1.7	4	13.5	18.3	20
PLS (5) -1	opt	15.4	9.6	89	3.4	0.7	2	13.7	17.1	9
	neut	17.5	9.3	89	6.1	0.4	2	15.6	18.7	9
	pess	19.6	9.1	89	9.0	0.4	2	17.5	20.4	9
PLS (5) -2	opt	7.8	7.5	59	3.5	5.5	13	5.1	8.7	28
	neut	10.0	7.3	59	6.4	5.7	13	6.8	10.0	28
	pess	12.3	7.0	59	9.2	6.0	13	8.5	11.6	28
PLS (5) -3	opt	7.3	8.0	44	4.3	4.2	23	4.2	7.8	33
	neut	9.5	7.7	44	7.1	4.2	23	5.8	9.1	33
	pess	11.8	7.4	44	9.9	4.6	23	7.5	10.6	33
PLS (5) -4	opt	7.4	8.8	41	4.1	3.3	24	4.0	7.8	35
	neut	9.5	8.5	41	6.8	3.4	24	5.6	9.0	35
	pess	11.8	8.2	41	9.6	3.5	24	7.2	10.5	35
PLS-1	opt	15.6	9.3	87	4.0	2.4	2	13.7	17.0	11
	neut	17.7	9.1	87	6.8	2.1	2	15.5	18.6	11
	pess	19.8	9.0	87	9.7	1.3	2	17.4	20.3	11
PLS-2	opt	5.9	4.6	57	3.3	5.9	11	3.8	6.1	32
	neut	8.2	4.5	57	6.0	6.2	11	5.3	7.6	32
	pess	10.5	4.3	57	8.7	6.6	11	7.0	9.4	32
PLS-3	opt	4.9	4.3	38	3.2	4.3	18	2.4	4.6	44
	neut	7.1	4.2	38	5.9	4.4	18	3.8	6.0	44
	pess	9.4	4.1	38	8.8	4.7	18	5.2	7.6	44
PLS-4	opt	5.0	4.9	33	2.1	2.4	24	2.1	4.3	43
	neut	7.2	4.7	33	4.7	2.5	24	3.5	5.6	43
	pess	9.5	4.5	33	7.4	2.7	24	4.9	7.1	43
PLS-5	opt	5.5	6.0	37	2.9	2.8	23	2.7	5.3	40
	neut	7.8	5.8	37	5.5	2.9	23	4.1	6.6	40
	pess	10.1	5.5	37	8.2	2.9	23	5.6	8.2	40

Tabelle 9-14: Zweiwöchiger VaR(95%) des DO-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	11.5	8.9	29	40.4	41.8	70	31.7	49.3	1
	neut	13.6	8.6	29	43.7	43.1	70	34.7	52.2	1
	pess	15.6	8.3	29	47.4	44.4	70	37.8	55.2	1
Delta-Gamma	opt	5.9	7.6	9	37.7	54.4	84	32.2	60.7	7
	neut	8.1	7.5	9	40.8	55.1	84	35.1	63.0	7
	pess	10.1	7.3	9	44.3	56.2	84	38.2	65.7	7
PCA-1	opt	49.1	31.0	100	0.0	0.0	0	49.1	58.0	0
	neut	50.3	30.2	100	0.0	0.0	0	50.3	58.7	0
	pess	51.5	29.5	100	0.0	0.0	0	51.5	59.3	0
PCA-2	opt	29.3	23.5	99	0.0	0.0	0	29.0	37.3	1
	neut	31.0	23.0	99	0.0	0.0	0	30.6	38.3	1
	pess	32.5	22.5	99	0.0	0.0	0	32.2	39.3	1
PCA-3	opt	26.0	20.3	98	0.0	0.0	0	25.5	32.7	2
	neut	27.8	19.9	98	0.0	0.0	0	27.3	33.8	2
	pess	29.4	19.5	98	0.0	0.0	0	28.9	34.9	2
PCA-4	opt	24.0	18.4	95	0.0	0.0	0	22.8	29.5	5
	neut	25.8	18.0	95	0.0	0.0	0	24.5	30.7	5
	pess	27.5	17.6	95	0.0	0.0	0	26.1	31.8	5
PCA-5	opt	22.3	18.0	91	0.0	0.0	0	20.3	27.4	9
	neut	24.2	17.6	91	0.0	0.0	0	22.0	28.5	9
	pess	25.9	17.2	91	0.0	0.0	0	23.6	29.7	9
PLS (5) -1	opt	25.7	21.7	90	4.2	5.9	6	23.4	32.0	4
	neut	27.5	21.2	90	6.8	6.2	6	25.2	33.0	4
	pess	29.1	20.8	90	9.7	6.6	6	26.8	34.1	4
PLS (5) -2	opt	17.8	19.5	90	3.4	2.5	6	16.3	25.1	4
	neut	19.8	19.1	90	6.1	3.0	6	18.2	26.2	4
	pess	21.7	18.8	90	9.0	3.8	6	20.1	27.3	4
PLS (5) -3	opt	18.4	18.5	85	3.8	2.3	7	15.9	24.1	8
	neut	20.3	18.2	85	6.3	2.7	7	17.8	25.2	8
	pess	22.2	17.8	85	9.0	3.4	7	19.5	26.4	8
PLS (5) -4	opt	19.4	19.8	87	3.3	2.1	7	17.2	25.9	6
	neut	21.4	19.4	87	5.7	2.4	7	19.0	27.0	6
	pess	23.2	19.1	87	8.4	2.9	7	20.8	28.1	6
PLS-1	opt	23.8	18.1	87	6.6	6.8	7	21.2	28.0	6
	neut	25.6	17.7	87	9.2	7.3	7	23.0	29.2	6
	pess	27.3	17.3	87	12.0	7.8	7	24.6	30.4	6
PLS-2	opt	11.2	12.3	74	5.8	5.9	14	9.1	14.6	12
	neut	13.2	12.0	74	8.6	6.3	14	11.0	15.9	12
	pess	15.1	11.8	74	11.5	6.6	14	12.8	17.3	12
PLS-3	opt	9.6	11.5	76	3.7	4.2	9	7.7	13.2	15
	neut	11.8	11.2	76	6.1	4.5	9	9.5	14.4	15
	pess	13.8	11.0	76	8.8	4.8	9	11.3	15.7	15
PLS-4	opt	10.8	13.2	80	2.1	1.3	5	8.8	15.3	15
	neut	13.0	12.9	80	4.2	1.2	5	10.6	16.4	15
	pess	14.9	12.7	80	6.8	1.2	5	12.3	17.6	15
PLS-5	opt	12.4	13.5	83	2.1	2.2	3	10.3	16.7	14
	neut	14.5	13.2	83	4.2	2.0	3	12.1	17.9	14
	pess	16.4	13.0	83	6.8	2.0	3	13.8	19.1	14

Tabelle 9-15: Alternative PLS-Grid-Modelle (Zweiwöchiger VaR(95%); DO-Portfolio)

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
PLS <sup>**</sup> -1	opt	27.2	19.9	84	11.1	17.2	9	23.9	31.6	7
	neut	29.0	19.5	84	14.1	18.2	9	25.7	32.8	7
	pess	30.6	19.1	84	17.0	19.4	9	27.2	34.0	7
PLS <sup>**</sup> -2	opt	16.4	15.4	73	3.7	5.0	12	12.5	19.4	15
	neut	18.4	15.1	73	6.4	5.5	12	14.3	20.6	15
	pess	20.2	14.9	73	9.2	6.0	12	15.9	21.8	15
PLS <sup>**</sup> -3	opt	14.0	13.6	77	2.9	2.4	13	11.2	17.2	10
	neut	16.1	13.3	77	5.5	2.7	13	13.1	18.5	10
	pess	18.0	13.1	77	8.2	2.9	13	15.0	19.8	10
PLS <sup>**</sup> -4	opt	14.1	13.6	81	3.5	3.8	11	11.8	17.7	8
	neut	16.2	13.3	81	5.9	4.0	11	13.8	19.0	8
	pess	18.1	13.0	81	8.4	4.3	11	15.6	20.3	8
PLS <sup>**</sup> -5	opt	14.7	13.7	83	5.0	4.9	8	12.6	18.4	9
	neut	16.7	13.4	83	7.4	5.2	8	14.5	19.7	9
	pess	18.6	13.2	83	10.0	5.5	8	16.3	21.0	9
PLS <sup>+</sup> -1	opt	23.7	18.2	84	11.3	16.1	11	21.2	28.2	5
	neut	25.6	17.8	84	14.3	17.0	11	23.1	29.5	5
	pess	27.2	17.5	84	17.3	18.1	11	24.8	30.8	5
PLS <sup>+</sup> -2	opt	13.6	12.0	68	6.1	8.9	18	10.4	15.7	14
	neut	15.7	11.7	68	8.8	9.5	18	12.3	17.1	14
	pess	17.6	11.5	68	11.7	10.2	18	14.1	18.6	14
PLS <sup>+</sup> -3	opt	12.9	12.2	69	3.7	3.9	18	9.6	14.9	13
	neut	14.9	12.0	69	6.4	4.3	18	11.5	16.2	13
	pess	16.8	11.8	69	9.3	4.6	18	13.3	17.6	13
PLS <sup>+</sup> -4	opt	12.7	13.2	74	3.2	3.5	14	9.9	15.9	12
	neut	14.8	12.9	74	5.6	3.8	14	11.8	17.1	12
	pess	16.8	12.7	74	8.1	4.1	14	13.6	18.4	12
PLS <sup>+</sup> -5	opt	13.6	13.4	81	4.4	4.4	10	11.5	17.3	9
	neut	15.7	13.1	81	6.7	4.8	10	13.4	18.6	9
	pess	17.6	12.9	81	9.3	5.1	10	15.2	20.0	9
PLS-1	opt	23.8	18.1	87	6.6	6.8	7	21.2	28.0	6
	neut	25.6	17.7	87	9.2	7.3	7	23.0	29.2	6
	pess	27.3	17.3	87	12.0	7.8	7	24.6	30.4	6
PLS-2	opt	11.2	12.3	74	5.8	5.9	14	9.1	14.6	12
	neut	13.2	12.0	74	8.6	6.3	14	11.0	15.9	12
	pess	15.1	11.8	74	11.5	6.6	14	12.8	17.3	12
PLS-3	opt	9.6	11.5	76	3.7	4.2	9	7.7	13.2	15
	neut	11.8	11.2	76	6.1	4.5	9	9.5	14.4	15
	pess	13.8	11.0	76	8.8	4.8	9	11.3	15.7	15
PLS-4	opt	10.8	13.2	80	2.1	1.3	5	8.8	15.3	15
	neut	13.0	12.9	80	4.2	1.2	5	10.6	16.4	15
	pess	14.9	12.7	80	6.8	1.2	5	12.3	17.6	15
PLS-5	opt	12.4	13.5	83	2.1	2.2	3	10.3	16.7	14
	neut	14.5	13.2	83	4.2	2.0	3	12.1	17.9	14
	pess	16.4	13.0	83	6.8	2.0	3	13.8	19.1	14

Tabelle 9-16: Zweiwöchiger VaR(99%) des DO-Portfolios

Methode	Messweise	VaR-Unterschätzung			VaR-Überschätzung			MAPE in %	RMSPE in %	%A <sup>0</sup> in %
		MW <sup>-</sup> in %	STD <sup>-</sup> in %	%A <sup>-</sup> in %	MW <sup>+</sup> in %	STD <sup>+</sup> in %	%A <sup>+</sup> in %			
Delta	opt	9.9	7.6	26	44.1	40.3	70	33.6	50.5	4
	neut	12.5	7.3	26	48.1	41.4	70	37.0	53.7	4
	pess	15.2	7.0	26	52.3	42.5	70	40.7	57.1	4
Delta-Gamma	opt	4.9	5.2	4	54.4	77.9	88	48.2	89.2	8
	neut	7.4	5.2	4	58.7	79.2	88	52.0	92.6	8
	pess	10.1	5.0	4	62.9	80.3	88	55.8	95.8	8
PCA-1	opt	50.2	31.3	99	0.0	0.0	0	49.7	58.9	1
	neut	51.6	30.5	99	0.0	0.0	0	51.1	59.7	1
	pess	53.0	29.7	99	0.0	0.0	0	52.5	60.4	1
PCA-2	opt	28.6	23.3	99	0.0	0.0	0	28.3	36.7	1
	neut	30.5	22.7	99	0.0	0.0	0	30.2	37.8	1
	pess	32.4	22.2	99	0.0	0.0	0	32.1	39.1	1
PCA-3	opt	25.2	19.5	98	0.0	0.0	0	24.7	31.5	2
	neut	27.2	19.0	98	0.0	0.0	0	26.7	32.8	2
	pess	29.2	18.5	98	0.0	0.0	0	28.6	34.3	2
PCA-4	opt	21.9	16.7	98	0.0	0.0	0	21.4	27.3	2
	neut	24.0	16.3	98	0.0	0.0	0	23.5	28.7	2
	pess	26.1	15.9	98	0.0	0.0	0	25.6	30.3	2
PCA-5	opt	19.4	15.2	96	0.0	0.0	0	18.6	24.1	4
	neut	21.6	14.8	96	0.0	0.0	0	20.7	25.6	4
	pess	23.8	14.4	96	0.0	0.0	0	22.9	27.3	4
PLS (5) -1	opt	27.2	22.2	94	5.0	0.0	1	25.6	34.1	5
	neut	29.2	21.7	94	8.5	0.0	1	27.5	35.3	5
	pess	31.2	21.2	94	10.7	0.0	1	29.4	36.5	5
PLS (5) -2	opt	17.7	17.4	88	0.0	0.0	0	15.6	23.3	12
	neut	20.0	17.0	88	0.0	0.0	0	17.6	24.6	12
	pess	22.2	16.6	88	0.0	0.0	0	19.6	26.0	12
PLS (5) -3	opt	15.7	16.1	89	3.9	0.0	1	14.0	21.2	10
	neut	18.0	15.6	89	6.5	0.0	1	16.1	22.5	10
	pess	20.3	15.2	89	10.5	0.0	1	18.2	24.0	10
PLS (5) -4	opt	15.4	16.6	95	3.7	0.0	1	14.7	22.1	4
	neut	17.7	16.1	95	6.3	0.0	1	16.9	23.4	4
	pess	20.0	15.7	95	10.3	0.0	1	19.2	24.8	4
PLS-1	opt	26.3	20.9	92	2.7	2.4	2	24.3	32.3	6
	neut	28.4	20.4	92	5.5	3.3	2	26.2	33.5	6
	pess	30.4	19.9	92	8.2	2.5	2	28.1	34.8	6
PLS-2	opt	11.9	11.5	74	1.2	2.0	6	8.9	14.3	20
	neut	14.3	11.2	74	4.1	1.8	6	10.9	15.7	20
	pess	16.7	10.9	74	7.0	2.0	6	12.9	17.3	20
PLS-3	opt	10.0	9.6	72	2.6	1.7	3	7.3	11.8	25
	neut	12.4	9.4	72	5.5	2.2	3	9.1	13.3	25
	pess	14.9	9.1	72	8.6	1.8	3	11.0	14.9	25
PLS-4	opt	9.8	10.5	82	0.0	0.0	0	8.0	13.0	18
	neut	12.2	10.2	82	0.0	0.0	0	10.0	14.4	18
	pess	14.7	9.9	82	0.0	0.0	0	12.1	16.1	18
PLS-5	opt	11.2	10.6	81	0.0	0.0	0	9.1	13.9	19
	neut	13.6	10.4	81	0.0	0.0	0	11.0	15.4	19
	pess	16.0	10.2	81	0.0	0.0	0	13.0	17.1	19

## Literaturverzeichnis

- Abken, P. (2000): "An Empirical Evaluation of Value at Risk by Scenario Simulation", Working Paper, Comptroller of the Currency (USA), Risk Analysis Division
- Albanese, C. und L. Seco (1997): "Harmonic Analysis in Value at Risk Calculations", Working Paper, University of Toronto
- Albrecht, P. (2000): "Mathematische Modellierung von Kredit- und Marktrisiken", Mannheimer Manuskripte zu Risikotheorie, Portfolio Management und Versicherungswirtschaft, Universität Mannheim
- Alexander C. (1996): "Volatility and Correlation Forecasting", in: Alexander, C. (Hrsg): "The Handbook of Risk Management and Analysis", J. Wiley, S. 233-260
- Alexander, C. und C.T. Leigh (1997): "On the Covariance Matrices Used in Value at Risk Models", The Journal of Derivatives, Vol. 4, No. 3, S. 50-62
- Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber und D. Heath (1997a): "Definition of Coherent Measures of Risk", Paper for the Presentation at the Risk Management Symposium of the European Finance Association Meeting, Vienna, August 27-30
- Artzner, P., F. Delbaen, J.-M. Eber und D. Heath (1997a): "Thinking Coherently", Risk, Vol. 10, No. 11, S. 68-71
- Bachelier, L. (1900): "Théorie de la Spéculation", Dissertation, Ecole Normale Supérieure, Paris, Gauthier-Villars
- Bahar, R., M. Gold, T. Kitto und C. Polizu (1997): "Making the Best of the Worst", Risk, Vol. 10, No. 8, S. 100-103
- Barber, J. und M. L. Copper (1996): "Immunitization Using Principal Component Analysis", The Journal of Portfolio Management, Fall 1996, S. 99-105
- Barone-Adesi, G. und R.E. Whaley (1987): "Efficient Analytic Approximation of American Option Values", The Journal of Finance, 42, June, S. 301-320
- Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (1996a): "Änderung der Eigenkapitalvereinbarung zur Einbeziehung der Marktrisiken", Basel
- Basler Ausschuss für Bankenaufsicht (1996b): "Aufsichtsrechtliches Rahmenkonzept für das Backtesting (Rückvergleiche) bei der Berechnung des Eigenkapitalbedarfs zur Unterlegung des Marktrisikos mit bankeigenen Modellen", Basel
- Bawa, V. S. (1975): "Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects", Journal of Financial Economics, 2, S. 95-121
- Bawa, V. S. und E. B. Lindenberg (1977): "Capital Market Equilibrium in a Mean Lower Partial Moment Framework", Journal of Financial Economics, 5, S. 189-200
- Beder, T. S. (1995): "VaR: Seductive but Dangerous", Financial Analysts Journal, Sept.-Oct., S. 12-24
- Biermann, B. (1999): "Die Mathematik von Zinsinstrumenten", R. Oldenbourg Verlag München
- Black, F. (1976): "The Pricing of Commodity Contracts", Journal of Financial Economics, 3, S. 167-179

- Black, F. und M. Scholes (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, No. 81, May/June, S. 673-654
- Blythe, S. (1996): "Out of Line", *Risk*, Vol. 9, No. 19, S. 82-84
- Böhmer, E. und S. Sperlich (1997): "Risikomessung mit VaR für Portfolios: Diskussion und empirischer Vergleich verschiedener Berechnungsmethoden", Arbeitspapier, Juli, Humboldt-Universität zu Berlin
- Bollerslev, T. (1986): "General Autoregressive Conditional Heteroskedasticity", *Journal of Econometrics*, 31, S. 307-327
- Bollerslev, T., R.Y. Chou und K.F. Kroner (1992): "ARCH-Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence", *Journal of Econometrics* 52, S. 5-59
- Bosch, K. (1998): "Statistik-Taschenbuch", 3. Aufl., R. Oldenbourg Verlag, München
- Boudoukh, J., M. Richardson und R. Whitelaw (1995): "Expect the Worst", *Risk*, Vol. 8, No. 9, S. 100-101
- Boudoukh, J., M. Richardson und R. Whitelaw (1997): "Investigation of a Class of Volatility Estimators", *The Journal of Derivatives*, Spring, S. 63-71
- Boudoukh, J., M. Richardson und R. Whitelaw (1998): "The Best of Both Worlds", *Risk*, Vol. 11, No. 5, S. 64-67
- Boyle, P., M. Broadie und P. Glasserman (1997): "Simulation Methods for Security Pricing", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, S. 1267-1321
- Boyle, P. (1977): "Options: A Monte Carlo Approach", *Journal of Financial Economics*, 4, S. 323-338
- Braun, H. (1984): "Risikomanagement - Eine spezifische Controllingaufgabe", Toeche-Mittler, Darmstadt
- Britten-Jones, M. und S. Schaefer (1997): "Non Linear Value-at-Risk", Working Paper, October, London Business School
- Bronstein, I. N., K. A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig (1999): "Taschenbuch der Mathematik", 4. Aufl., Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main
- Brotherton-Ratcliffe (1994): "Monte Carlo Motoring", *Risk*, Vol. 7, No. 12, S. 53-57
- Bühler, A. (1995): "Einfaktormodelle der Fristenstruktur der Zinssätze; Theoretische und empirische Betrachtungen", Dissertation, Universität St. Gallen
- Bühler, A. und H. Zimmermann (1996): "A Statistical Analysis of the Term Structure of Interest Rates in Switzerland and Germany", *The Journal of Fixed Income*, December, S. 55-67
- Caks, J. (1977): "The Coupon Effect on Yield to Maturity", *The Journal of Finance*, 3, S. 103-115
- Campa, J. und P.K. Chang (1995): "The Forecasting Ability of Correlation Implied in Foreign Exchange Options", Working Paper, Stern School of Business, New York University
- Cardenas, J., E. Fruchard, E. Koehler, Ch. Michel und I. Thomas (1997): "VaR: One Step Beyond", *Risk*, Vol. 10, No. 10, S. 72-76

- Cardenas, J., E. Fruchard, J.-F. Picron, C. Reyes, K. Walters und W. Yang (1999): "Monte Carlo within a day", *Risk*, February, S. 55-59
- Carverhill, A. und L. Clewlow (1994): "On the Simulation of Contingent Claims", *The Journal of Derivatives*, Winter, S. 66-74
- Chambers, D.R., W.T. Carleton und D.W. Waldman (1984): "A New Approach to Estimation of the Term Structure of Interest Rates", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, S. 233-252
- Chishti, A. (1999): "Simulation of Fixed-income Portfolios Using Grids", *Algo Research Quarterly*, Vol. 2, No. 2, June, S. 41-49
- Cox, J., S. Ross und M. Rubinstein (1979): "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics*, No 7, S. 229-263
- Dagpunar, J. (1988): "Principles of Random Variate Generation", Clarendon Press, Oxford
- Danielsson, J., P. Hartmann und C. G. de Vries (1998): "The Cost of Conservatism: Extreme Returns, Value-at-Risk, and the Basle 'Multiplication Factor'", Working Paper, London School of Economics
- Davidson, C. (1997): "Buyers' Choices", *Risk (Technology Supplement)*, Vol. 8, S. 14-20
- Day, T. und C. Lewis (1992): "Stock Market Volatility and the Information Content of Stock Index Options", *Journal of Econometrics*, 52, S. 267-287
- Duffie, D. und J. Pan (1997): "An Overview of Value at Risk", *The Journal of Derivatives*, Spring, Vol. 4, No. 3, S. 7-49
- Dupire, B. (1998): "Monte Carlo: Methodologies and Applications for Pricing and Risk Management", Risk Books, London
- EBK (Eidgenössische Bankenkommission) (1997): "Rundschreiben 97/1: Richtlinien zur Eigenmittelunterlegung von Marktrisiken Art 12l – 12p BankV (REM-EBK)", Oktober, Eidg. Bankenkommission
- El Jahel, L, W. Perraudin und P. Sellin (1997): "Value at Risk for Derivatives", Working Paper, September, Birkbeck College
- Embrechts, P., C. Klüppelberg und T. Mikosch (1997): "Modelling Extremal Events in Insurance and Finance", Springer, Berlin
- Engeler, M. (1998): "Generic Derivatives and Exotic Options: Aspects of Valuation and Market Risk Measurement", Dissertation Universität Zürich, Verlag Paul Haupt
- Estrella, A. (1994): "Taylor, Black, and Scholes: Series Approximations and Risk Management Pitfalls", Working Paper, Federal Reserve Bank of New York
- Fahrmeir, L. und A. Hamerle (1984): "Multivariate statistische Verfahren", Walter de Gruyter, Berlin
- Fallon, W. (1996): "Calculating Value-at-Risk", Working Paper 96-49, Wharton School, University of Pennsylvania
- Fama, E. (1965): "The Behavior of Stock Market Prices", *Journal of Business*, 38, S. 34 - 105
- Figlewski, S. (1994): "Forecasting Volatility Using Historical Data", Working Paper Series No. S-94-13, New York University Salomon Center, Leonard N. Stern School of Business

- Finger, C. (1998): "A Methodology to Stress Correlations", RiskMetrics Monitor, 4<sup>th</sup> Quarter, S. 3-11
- Fisz, M. (1979): "Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik", 9. Auflage, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin
- Frye, J. (1998): "Monte Carlo by day", Risk, Vol. 11, S. 66-71
- Fuglsbjerg, B. (2000): "Variance Reduction Techniques for Monte Carlo Estimates of Value at Risk", Financial Department, SimCorp A/S
- Garman, M. B. und S. W. Kohlhagen (1983): "Foreign Currency Option Values", Journal of International Money and Finance, 2, S. 231-237
- Garthwait, P. H. (1994): "An Interpretation of Partial Least Squares", Journal of the American Statistical Association, 89:425, S. 122-127
- Gibson, M. (1997): "Information System for Risk Management", in: Bank for International Settlements (Hrsg): "The Measurement of Aggregate Market Risk", Basel, S. 115-132
- Gibson, M.S. und M. Pritsker (2000): "Improving Grid-based Methods for Estimating Value-at-Risk of Fixed-Income Portfolios", Working Paper, Trading Risk Analysis Section, Division of Research and Statistics, Federal Reserve Board
- Gizycki, M. und N. Hereford (1998): "Assessing the Dispersion in Banks' Estimates of Market Risk: The Result of A Value-at-Risk Survey", Working Paper, System Stability Department, Reserve Bank of Australia
- Glassermann, P., P. Heidelberber und P. Shahabuddin (1999a): "Stratification Issues in Estimation Value-at-Risk", Research Report, IBM Research Division
- Glassermann, P., P. Heidelberber und P. Shahabuddin (1999b): "Variance Reduction Techniques for Estimation Value-at-Risk", Research Report, IBM Research Division
- Glassermann, P., P. Heidelberber und P. Shahabuddin (2000a): "Efficient Monte Carlo Methods for Value-at-Risk", Research Report, IBM Research Division
- Glassermann, P., P. Heidelberber und P. Shahabuddin (2000b): "Portfolio Value-at-Risk with Heavy-Tailed Risk Factors", Research Report, IBM Research Division
- Golup, B. W. und L. M. Tilman (1997): "Measuring Yield Curve Risk Using Principal Components Analysis, Value at Risk, and Key Rate Durations", Journal of Portfolio Management, Vol. 23 No. 4, S. 72-84
- Group of Thirty, Global Derivative Study Group (1993): "Derivatives: Practices and Principles"
- Hamilton, J.D. (1990): "Analysis of Time Series Subject to Changes in Regime", Journal of Econometrics, 45, S. 39-70
- Hammersley, J.M. und D.C. (1964): "Monte Carlo Mehods", Methuen, London
- Harlow W.V. (1991): "Asset Allocation in a Downside-Risk Framework", Financial Analysts Journal, September-October, S. 28-40
- Hartung, J., B. Elpelt und K.-H. Klösener (1999): "Statistik: Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik", 12. Auflage, R. Oldenbourg Verlag, München
- Haug, E. G. (1998): "The Complete Guide to Option Pricing Formulas", McGraw-Hill, New York

- Hendricks, D. (1996): "Evaluation of Value at Risk Models using Historical Data", Federal Reserve Bank of New York, Economic Policy Review, April, S. 39-69
- Hill, C.F. und S. Vaysman (1998): "An Approach to Scenario Hedging", The Journal of Portfolio Management, Winter, S. 83-92
- Hiraki, T., N. Shiraishi und N. Takezawa (1996): "Cointegration, Common Factors, and the Term Structure of Yen Offshore Interest Rates", The Journal of Fixed Income, December, S. 69-75
- Hoskuldsson, P. (1988): "PLS Regression Methods", Journal of Chemometrics, 2, S. 211-228
- Hull, J. (1993): "Options, Futures, and other Derivative Securities", 2<sup>nd</sup> ed., Prentice Hall International Inc., Englewood Cliffs, New Jersey
- Huschens, S. (2000): "Anmerkungen zur Value-at-Risk Definition", Working Paper, TU Dresden, Fakultät für Wirtschaftswissenschaften
- Jackson, P., D.J. Maude und W. Perraudin (1997): "Bank Capital and Value at Risk", Journal of Derivatives, Vol. 4, No. 3, S. 73-89
- Jamshidian, F. und Y. Zhu (1997): "Scenario Simulation Model: Theory and Methodology", Finance and Stochastics, Vol. 1, S. 43-67
- Jorion, P. (1995): "Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market", The Journal of Finance, Vol. 50, No. 2, S. 507-528
- Jorion, P. (1996): "Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk", McGraw-Hill, New York
- Kahn, R. (1989): "Risk and Return in the U.S. Bond Market: A Multifactor Approach", in: F. Fabozzi (Hrsg): "Advances & Innovations in the Bond and Mortgage Markets", Probus
- Kalos, M.H. und P.A. Whitlock (1986): "Monte Carlo Methods: Volume I: Basics", John Wiley & Sons, New York
- Kambhu, J.E. (1998): "Dealers' Hedging of Interest Rate Options in the U.S. Dollar Fixed-Income Market", Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review, June, S. 35-46
- Kim, J. und C. Finger (1999): "A Stress Test to Incorporate Correlation Breakdown", Working Paper, RiskMetrics Group
- Knuth, D.E. (1969): "The Art of Computer Programming. Vol. 2 – Seminumerical Algorithms", Addison-Wesley, Reading
- Kreinin, A., L. Merkoulvitch, D. Rosen und M. Zerbs (1998a): "Measuring Portfolio Risk Using Quasi Monte Carlo Methods", Algo Research Quarterly, Vol. 1, No. 1
- Kreinin, A., L. Merkoulvitch, D. Rosen und M. Zerbs (1998b): "Principal Component Analysis in Quasi Monte Carlo Simulation", Algo Research Quarterly, Vol. 1, No. 2
- Kubiec, P. H. (1998): "Stress Testing in a Value-at-Risk Framework", The Journal of Derivatives, 3, S. 6-25
- Lawrence, C. und G. Robinson (1995): "Liquid Measures", Risk, Vol. 8, No. 7, S. 52-55
- Lekkos, I. (1999): "Distributional Properties of Spot and Forward Interest Rates: USD, DEM, GBP, and JPY", The Journal of Fixed Income, S. 35-54

- Litterman, R. und J. Scheinkman (1991): "Common Factors Affecting Bond Returns", *The Journal of Fixed Income*, June, S. 54-61
- Loretan, M. (1997): "Generating Market Risk Scenarios Using Principal Component Analysis", in: *Bank for International Settlements (Hrsg.): "The Measurement of Aggregate Market Risk"*, Basel, S. 23-60
- Maess, G. (1985): "Vorlesung über numerische Mathematik I", Birkhäuser, Basel
- Mandelbrot, B. (1963): "The Variations of Certain Speculative Prices", *Journal of Business*, 36, S. 394-419
- Marshall, Ch. und M. Siegel (1997): "Value at Risk: Implementing a Risk Measurement Standard", *The Journal of Derivatives*, Spring, S. 91-111
- Mathai, A. M. und S. B. Provost (1992): "Quadratic Forms in Random Variables: Theory and Applications", Marcel Dekker Inc., New York
- Matten, C. (1996): "Managing Bank Capital: Capital Allocation and Performance Measurement", John Wiley & Sons, New York
- McCulloch, J.H. (1975): "An Estimate of the Liquidity Premium", *Journal of Political Economy*, 88, S. 95-119
- Merton, R.C. (1976): "Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Econometrics*, 3, S. 141-183
- Mina, J. und A. Ulmer (1999): "Delta-Gamma Four Ways", Research Report, RiskMetrics Group, LLC
- Moser, H. und M. Quast (1994): "Organisation des Risikomanagements in einem Bankkonzern", in: H. Schierenbeck und H. Moser (Hrsg.): "Handbuch Bankcontrolling". Gabler Wiesbaden
- Murphy, B.P., D. Won und D. Gulrajani (1995): "Valuation and risk analysis of international bonds", in: Fabozzi, F und T. Fabozzi (Hrsg.): "The handbook of fixed income securities, 4<sup>th</sup> ed.", Homewood: Irwin 1995
- Musiela, M. und M. Rutkowski (1997): "Martingale Methods in Financial Modelling", Springer-Verlag, Berlin
- Pichler, S. und K. Selitsch (1999): "A Comparison of Analytical VaR Methodologies for Portfolios that Include Options", Working Paper, Department of Finance, Vienna University of Technology
- Picoult, E. (1998). "Calculating Value-at-Risk with Monte Carlo Simulation", in: *Risk Books*, edited by B. Dupire: "Monte Carlo: Methodologies and Applications for Pricing and Risk Management", London, S. 209-229
- Portmann, T. und P. Wegmann (1998): "Lower Partial Moments und Value-at-Risk: Eine Synthese", *Finanzmarkt und Portfolio Management*, Vol. 12, Nr. 3, S. 327-341
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling und B. P. Flannery (1997): "Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing", 2<sup>nd</sup> ed., Cambridge University Press, Cambridge
- Pritsker, M. (1996): "Evaluating Value at Risk Methodologies: Accuracy versus Computational Time", Research Paper, Board of Governors of the Federal Reserve System
- Pritsker, M. (2001): "The Hidden Dangers of Historical Simulation", Working Paper, Board of Governors of Federal Reserve System, April

- Quinlan, G. D. (1998): "Using Non-Normal Monte Carlo Simulation to Compute Value-at-Risk", in: Risk Books, edited by B. Dupire: "Monte Carlo: Methodologies and Applications for Pricing and Risk Management", London, S. 245-253
- Read, O. (1998): "Parametrische Modelle zur Ermittlung des Value-at-Risk", Dissertation, Universität zu Köln
- Reiner, E. und M. Rubinstein (1991): "Unscrambling the Binary Code", Risk, Vol. 4, No. 9
- RiskMetrics (1996): "RiskMetrics Technical Document", J.P.Morgan/Reuters, 4<sup>th</sup> ed., New York
- Robinson, G. (1996): "More Haste, Less Precision", Risk, Vol. 9, No. 9, S. 117-121
- Ross, S. A. (1976): "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", Journal of Economic Theory, S. 343-362
- Ross, S., R. Westerfield und J. Jaffe(1999): "Corporate Finance", 5<sup>th</sup> ed., Irwin McGraw Hill
- Rouvinez, C. (1997): "Going Greek with VaR", Risk, Vol. 10, No. 2, S. 57- 65
- Roy, A.D. (1952): "Safety First and the Holding of Assets", Econometrica, 20, S. 431-449
- Rubinstein (1994): "Implied Binomial Trees", Journal of Finance, Vol. 49, No. 3, S. 771-818
- Schubert L. (1996): "Lower Partial Moments in Mean-Variance-Portefeuilles", Finanzmarkt und Portfolio Management, Vol. 10, Nr. 4, S. 496-509
- Sharpe, W. (1964): "Capital Asset Pricing: A Theory of Markte Equilibrium under Conditions of Risk", The Journal of Finance, 19, S. 425-442
- Shaw, J. (1998): "Beyond VaR and Stress Testing", in: Risk Books, edited by B. Dupire: "Monte Carlo: Methodologies and Applications for Pricing and Risk Management", London, S. 231- 244
- Shreider, Y.A. (1966): "The Monte Carlo Method", Pergamon Press, New York
- Singh, M. K. (1997): "Value at Risk Using Principal Components Analysis", The Journal of Portfolio Management, Fall 1997, S. 101-112
- Smithson, C. und L. Mynton (1996a): "Value-at-Risk", Risk, Vol. 9, No. 1, S. 25-27
- Smithson, C. und L. Mynton (1996b): "Value-at-Risk (2)", Risk, Vol. 9, No. 2, S. 38-39
- Staub, R. (1996): "Bond Risks Based on Factor Volatilities", Dissertation, Universität St. Gallen
- Staub, Z. (1997): "Management komplexer Zinsrisiken mit derivativen Instrumenten", Dissertation, Universität St. Gallen
- Steely, J. (1990): "Modelling the Dynamics of the Term Structure of Interest Rates", The Economic and Social Review, Vol. 21, No. 4, S. 337-361
- Stone, M. und R.J. Brooks (1990): "Continuum Regression: Cross-validated Sequentially Constructed Prediction Embracing Ordinary Least Squares, Partial Least Squares and Principal Component Regression", Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, Vol. 52, No.2, S. 237-269
- Studer, G. (1997): "Value at Risk and Maximum Loss Optimazation", Dissertation, ETH-Zürich
- Taylor, A.L. (1986): "Modeling Financial Time Series", John Wiley & Sons, Chichester
- Überhuber, C. (1995): "Computer-Numerik 2", Springer, Berlin

- Wilson, T. (1993): "Infinite Wisdom", Risk, 6, S. 37-45
- Wilson, T. (1996): "Calculating Risk Capital", in: Alexander, C. (Hrsg.): "The Handbook of Risk Management and Analysis", S. 193-232
- Wilson, T. (1994): "Plugging the GAP", Risk, Vol. 7, No. 10, S. 74-80
- Zangari, P. (1996a): "A VaR methodology for portfolios that include options", RiskMetrics Monitor, January, S. 4-12
- Zangari, P. (1996b): "How Accurate is the Delta-Gamma Methodology", in: RiskMetrics Monitor, 3<sup>rd</sup> quarter, S. 12-30
- Zhang, H. (1993): "Treasury Yield Curves and Cointegration", Applied Economics, 25, S. 361-367

## Stichwortverzeichnis

- (G)ARCH-Modelle 18  
 Cap 181  
 Caplet 141, 181  
 Cholesky-Verfahren 37  
 CPU-Zeiten 12  
 Delta-Gamma-Methode 45  
 Delta-Methode 42  
 Delta-Vektor 21  
 Digital-Option-Portfolio 145  
 DO-Portfolio *Siehe* Digital-Option-Portfolio  
 Eigenvektor 185  
 Eigenwert 185  
 Eigenwertproblem 173, 175, 176, 177, 184, 196  
 Equally-Weighted-Moving-Average-Modell 18  
 Exponentially-Weighted-Moving-Average-Modell 18  
 Fehlerkennzahlen 116  
 Floor 181  
 Floorlet 181  
 Forwardrate 188  
 Full-MC-Methode 35  
 G/V-Funktion des Portfolios 20  
 G/V-Verteilung des Portfolios 26  
 Gamma-Matrix 21  
 Grid-Approximation 50  
 Grid-Approximationsfehler 54  
 Grid-G/V-Funktion 53  
 Grid-Punkte 51  
 Grid-Tabelle 51  
 Haltedauer 28  
 Hedged-Long/Short-Bond-Portfolio 134  
 HLSB-Portfolio *Siehe* Hedged-Long/Short-Bond-Portfolio  
 Irrtumswahrscheinlichkeit 29  
 Knotenpunkte 51  
 Kohärentes Risikomass 30  
 Komplexes Portfolio 24  
 Konfidenzniveau 29  
 Konvexes Portfolio 23  
 Kovarianzmatrix 18  
 LB-Portfolio *Siehe* Long-Bond-Portfolio  
 Lineares Portfolio 22  
 Long/Short-Bond-Portfolio 128  
 Long-Bond-Portfolio 120  
 Lower-Partial-Moment 30  
 LPM *Siehe* Lower Partial Moment  
 LSB-Portfolios *Siehe* Long/Short-Bond-Portfolio  
 MAPE *Siehe* Mean Absolute Percentage Error  
 Marktfaktorblock 92  
 Marktfaktormodell 8  
 Marktrisiken 13  
 Marktrisikomasse 25  
 Marktvektor 16  
 Marktwerttrisiken *Siehe* Marktrisiken  
 Mathematica 11  
 MC-Methoden mit G/V-Approximationen 6, 34  
 MC-Methoden mit Varianz-Reduktionstechniken 5  
 Mean Absolute Percentage Error 116  
 Methodenspezifischer Rechenaufwand 163  
 Parametrische Delta-Gamma-Methoden 4  
 PCA-Grid-Methode 49  
 PCA-Ladungsmatrix 64  
 PCA-Methode 59  
 PCA-Vektor 64  
 PLS-Faktor 79  
 PLS-Grid-Methode 77  
 PLS-Ladungsmatrix 84  
 PLS-Restabweichung 127  
 PLS-Vektor 83  
 Portfoliogruppen 103  
 Portfoliotypen 22  
 Pre-Calculation-Datenset 77  
 Referenzportfolio 160  
 Risikovektor 17  
 RMSPE *Siehe* Root Mean Squared Percentage Error  
 Root Mean Squared Percentage Error 117  
 SCF-Portfolio *Siehe* Short-Caplet/Floorlet-Portfolio  
 Short-Caplet/Floorlet-Portfolio 140  
 Shortfall-Masse 30  
 Shortfall-VaR 31  
 Stochastischer Prozess 16  
 SVaR *Siehe* Shortfall-VaR  
 Target-Shortfall 30  
 Taylor-Reihe 22  
 Testablauf 106  
 Value-at-Risk 25  
 VaR-Dimensionen 8  
 VaR-Referenzwerte 113  
 Verallgemeinerte inverse Verteilungsfunktion 27  
 Verteilung des Risikovektors 18  
 Zinskurvensets 108

## Lebenslauf

Name: Tuor  
Vorname: Roman  
Geburtsdatum: 27. Mai 1971  
Geburtsort: Basel

## Ausbildung

1978 – 1987 Primarschule und Progymnasium Allschwil  
1987 – 1991 Mathematisch-Naturwissenschaftliches Gymnasium Basel,  
Matura Typ C  
1991 – 1997 Studium der Wirtschaftswissenschaften an der Universität Basel  
Schwerpunkte: Finanzmärkte, Bankmanagement und Unternehmens-  
finanzierung. Lizentiatsarbeit „Value-at-Risk: Methoden und Erfah-  
rungen in der Praxis“  
1997 Universitätsabschluss mit dem Lizentiat (lic. rer. pol)  
1998 – 2002 Wirtschaftswissenschaftliches Doktorandenstudium an der Universität  
St. Gallen.  
Fachprogramm „Finanzen und Kapitalmärkte“  
2003 Doktorprüfung

## Berufstätigkeit

1994 – 1997 Schweizerischer Bankverein, Basel (heute UBS)  
Werkstudent in diversen Abteilungen, im Besonderen  
- Asset Management Institutionelle  
- Hypotheken und Immobilien des Personalvorsorgekonzern  
- Vorsorge International des Personalvorsorgekonzerns  
1997 – 1999 Almafin AG, St. Gallen (heute AlmafinJaeger, SunGard Company)  
Entwicklung und Beratung im Bereich Asset & Liability- sowie Risk  
Management  
2000 Eigenständige Weiterentwicklung von simulationsbasierten Value-at-  
Risk-Methoden in Mathematica  
seit 2001 PostFinance der Schweizerischen Post, Bern  
Leiter Risk Management